平成23年度

試験問題

# 数　　学

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない.
2. 試験開始後，問題冊子，解答用紙の印刷不鮮明や汚れ，問題冊子の落丁・乱丁等に気付いたときは，手を挙げて監督者に知らせよ.
3. 監督者の指示に従い，解答用紙の受験番号欄に受験番号を記入せよ．受験番号欄は合計4箇所ある．受験番号未記入の解答用紙は採点されない.
4. 解答は所定の解答欄に記入せよ．表面で不足する場合は裏面に解答してもよい．解答用紙はどのページも切り離してはならない.
5. 試験時間は2時間である.
6. 試験終了後，問題冊子は持ち帰ってよい.

ー余白ー

(このページに問題はありません)

**I** 0以上の任意の整数$i$に対して, $x$の$i$次式$g_i(x)$を

$i=0$のとき $g_0(x)=1$, $i \geqq 1$のとき $g_i(x)=\dfrac{x(x+1)\cdots(x+i-1)}{i\,!}$

と定義する.

(1) $f(x)=\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ (但し$a_n \neq 0$)を$x$に関する実数係数の$n\,(\geqq 0)$次式とする. このとき, 等式 $f(x)=\displaystyle\sum_{i=0}^{n} c_i\, g_i(x)$ が任意の実数$x$について成り立つような実数$c_i$ $(0 \leqq i \leqq n$, 但し$c_n \neq 0)$ が一意的に存在することを証明せよ.

(2) (1)において, $n>0$のとき等式 $f(x)-f(x-1)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i\, g_{i-1}(x)$ が成り立つことを証明せよ.

(3) $F(x)$ $(\neq 0)$を$x$に関する実数係数の$n\,(\geqq 0)$次式とし, 任意の整数$a$に対して$F(a)$が整数であると仮定する. このとき, 等式

$F(x)=\displaystyle\sum_{i=0}^{n} d_i\, g_i(x)$ が任意の実数$x$について成り立つような整数

$d_i$ $(0 \leqq i \leqq n$, 但し$d_n \neq 0)$ が一意的に存在することを証明せよ.

**II** 実数の数列$\{a_n\}_{n=1,\,2,\,\cdots}$は, 任意の正整数$p, q$に対して不等式

$$|\,a_{p+q}-a_p-a_q\,|<1$$

を満たしているとする.

(1) 任意の正整数$n$と, 2以上の任意の整数$k$に対して, 不等式

$$|\,a_{kn}-k\,a_n\,|<k-1$$

が成り立つことを証明せよ.

(2) 任意の正整数$n, k$に対して, 不等式

$$|\,n\,a_{n+k}-(n+k)\,a_n\,|<2n+k-2$$

が成り立つことを証明せよ.

**III**　$a, b$ を実数とする.

(1) 定積分

$$I(a,b) = \int_{-\pi}^{\pi} (1 + a\sin x + b\,x)^2\,dx$$

を求めよ.

(2) $a, b$ が実数全体を動くとき, (1) の定積分 $I(a,b)$ を最小にするような実数の組 $(a,b)$ がただ一組存在することを示し, そのような $(a,b)$ 及び $I(a,b)$ の最小値を求めよ.

**IV**　$xy$ 平面において原点 O$\,(0,0)$ を中心とする半径 1 の円を $S$ とし, 円 $S$ の任意の点 $P$ に対して, 点 $P$ における円 $S$ の接線を $L(P)$ とおく.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

を全ての成分が実数からなる 2 行 2 列の行列とし, $A$ によって定まる $xy$ 平面の一次変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を $\varphi$ とおく. このとき, 円 $S$ の任意の点 $P$ に対して円 $S$ の点 $Q$ が存在し, 接線 $L(P)$ のいかなる点も $\varphi$ によって接線 $L(Q)$ の点に移されると仮定する.

(1) 円 $S$ の点 $P$ の座標を $(s,t)$ として, 接線 $L(P)$ の方程式を求めよ.

(2) 行列 $A$ は逆行列を持つことを証明せよ.

(3) 円 $S$ の点 $Q$ は円 $S$ の点 $P$ により一意的に定まることを示し, 点 $Q$ の座標 $(u,v)$ を点 $P$ の座標 $(s,t)$ 及び行列 $A$ の成分 $a, b, c, d$ を用いて表示せよ.

(4) $xy$ 平面の一次変換 $\varphi$ は, 原点 O$\,(0,0)$ を中心とする回転か, または原点 O$\,(0,0)$ を通るある直線 $\ell$ を対称軸とする対称変換のいずれかであることを証明せよ.

―余白―

(このページ以降に問題はありません)