平成23年度入学試験問題

数　　学（理，医，歯，工学部）

注 意 事 項

1　この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはならない。

2　問題冊子は，全部で5ページある。（落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合は申し出ること。）

別に解答用紙がある。

3　**解答はすべて，問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定と異なる解答用紙に記入された解答は零点となる。**

4　受験番号は，各解答用紙の指定された2箇所に必ず記入すること。

5　受験学部，学科により解答すべき問題（○印），解答用紙の枚数及び解答時間は，下表のとおりである。

受験学部，学科	解答すべき問題（○印）					解答用紙の枚数	解答時間
	1	2	3	4	5		
理学部（数学科，物理学科）及び工学部	○	○	○	○	○	5枚	120分
理学部（化学科，生物学科，自然環境科学科）及び医学部（保健学科）	○	○	○	○		4枚	90分
医学部（医学科）及び歯学部		○	○	○	○	4枚	90分

6　下書きは，問題冊子の余白を使用すること。

7　問題冊子は，持ち帰ること。

1 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ。

(1) A^2，A^3 を求めよ。

(2) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる最小の自然数 n を求めよ。

(3) $A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{100}$ を求めよ。

2 数直線上の動点Aがはじめ原点にある。動点Aは1秒ごとに数直線上を正の向きまたは負の向きにそれぞれ$\frac{1}{2}$の確率で指定された長さを移動するものとする。n秒後に動点Aが原点に戻る確率をp_nとする。ただし，nは自然数とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 動点Aが1秒ごとに正の向きに1または負の向きに1移動するとき，p_1，p_2を求めよ。

(2) 動点Aが1秒ごとに正の向きに1または負の向きに1移動するとき，p_nを求めよ。

(3) 動点Aが1秒ごとに正の向きに3または負の向きに1移動するとき，p_nを求めよ。

3 $\triangle$OAB において，OA $= 1$，OB $=$ AB $= 2$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。

(2) $\angle$AOB の二等分線上の点 P が AP $=$ BP を満たすとき，線分 AP の長さを求めよ。

4 関数

$$f(t)=\begin{cases} t & (0 \leqq t \leqq \pi) \\ 2\pi - t & (\pi < t \leqq 2\pi) \end{cases}$$

に対して，次のように2つの関数 $g(x)$，$h(x)$ を $0 \leqq x \leqq 2\pi$ で定義する。

$$g(x)=\int_0^{2\pi} f(t)\cos(t+x)\,dt,\quad h(x)=\int_0^{2\pi} f(t)\sin(t+x)\,dt$$

このとき，次の問いに答えよ。

(1) 関数 $g(x)$，$h(x)$ を求めよ。

(2) x が $0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲を動くとき，関数 $y=g(x)+h(x)$ の最大値と最小値を求めよ。

5 実数 a, b, c に対して, 3次関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ を考える。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ が整数であるならば, すべての整数 n に対して, $f(n)$ は整数であることを示せ。

(2) $f(2010)$, $f(2011)$, $f(2012)$ が整数であるならば, すべての整数 n に対して, $f(n)$ は整数であることを示せ。