

平成23年度 大阪市立大学個別学力検査

数 学 問 題

(理学部・工学部・医学部医学科)

注 意 事 項

- 1 問題冊子は、監督者が「解答始め」の指示をするまで開かないこと。
- 2 問題冊子は全部で2ページである。脱落のあった場合には申し出ること。
- 3 解答用紙は全部で4枚である。各ページ所定欄に、それぞれ氏名、受験学部、受験番号（最後のページは、左右2か所）を忘れずに記入すること。
- 4 解答は、すべて解答用紙の所定欄に記入すること。
- 5 解答用紙の裏面を計算に使ってもよい。
- 6 机上に各自の「受験票」と「大学入試センター試験受験票」を出しておくこと。
- 7 問題冊子は持ち帰ること。

第 1 問 (50点)

a は実数で $0 < a < 1$ とする. 座標平面上の第 1 象限にある曲線 $y = \frac{1}{x}$ と 2 直線 $y = x$, $y = ax$ で囲まれる部分 $P(a)$ の面積を $S(a)$ とする. 次の問いに答えよ.

問 1 $S(a)$ を a を用いて表せ.

問 2 $2S\left(\frac{1}{e}\right) \leq S(a) \leq 2S\left(\frac{1}{e}\right) + 1$ となる a の範囲を求めよ.

問 3 $P(a)$ を x 軸の周りに回転して得られる回転体の体積 $V(a)$ と $\lim_{a \rightarrow 0} V(a)$ を求めよ.

第 2 問 (50点)

実数を成分とする 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ p & q \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

問 1 n を正の整数とすると, B^n を求めよ.

問 2 $AP = PB$ が成り立つように, b, p, q の値を求めよ.

問 3 n を正の整数とすると, A^n を求めよ.

第 3 問 (50点)

p, q は正の実数で $p > q$ とする. $x > 0$ において, 2つの関数

$$f(x) = e^{px} + e^{-px}, \quad g(x) = e^{qx} + e^{-qx}$$

を考える. 次の問いに答えよ.

問1 $f(x) > 2$ を示せ.

問2 $f(x) > g(x)$ を示せ.

問3 $h(x) = \frac{f'(x) - g'(x)}{f(x) - g(x)}$ とするとき, $h(x)$ は $x > 0$ において単調減少であることを示せ.

第 4 問 (50点)

N, a, b は正の整数とする. 箱の中に赤玉が a 個, 白玉が b 個入っている. 箱から無作為に 1 個の玉を取り出し, 色を記録して箱に戻す. この操作を繰り返し, 同じ色の玉が 2 回続けて出るか, または取り出す回数が $2N + 2$ になったら終了する. n 回取り出して終わる確率を $P(n)$ とし, $p = \frac{a}{a+b}$, $q = \frac{b}{a+b}$, $r = pq$ とおく. 次の問いに答えよ.

問1 $P(2j), P(2j+1)$ ($j = 1, 2, \dots, N$) および $P(2N+2)$ を r を用いて表せ.

問2 $(1-r) \sum_{j=1}^N jr^{j-1} = \frac{1-r^N}{1-r} - Nr^N$ を示せ.

問3 取り出す回数の期待値 $m = \sum_{n=2}^{2N+2} nP(n)$ について, $m < \frac{2+r}{1-r}$ となることを示せ.

問4 上の期待値 m について, $m < 3$ を示せ.