平成 24 年度一般入試前期日程

数 学 問 題 紙

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題紙を開いてはいけません。
2. 数学の問題紙は，２ページあります。
3. 解答用紙は４枚，草案紙は１枚あります。
4. 受験番号は，監督者の指示に従って，全ての解答用紙の指定された箇所に必ず記入しなさい。
5. 受験番号および解答以外のことを解答用紙に書いてはいけません。
6. 解答はすべて解答用紙の指定された欄に書くこと。裏面に書かないこと。
7. 解答用紙のみを提出しなさい。問題紙，草案紙は持ち帰りなさい。

問題 1　正の奇数 p に対して，3つの自然数の組 $(x,\ y,\ z)$ で，$x^2+4yz=p$ を満たすもの全体の集合を S とおく．すなわち，

$$S=\{(x,\ y,\ z)\,|\,x,\ y,\ z \text{ は自然数},\ x^2+4yz=p\}.$$

次の問いに答えよ．

問 1　S が空集合でないための必要十分条件は，$p=4k+1$（k は自然数）と書けることであることを示せ．

問 2　S の要素の個数が奇数ならば S の要素 $(x,\ y,\ z)$ で $y=z$ となるものが存在することを示せ．

問題 2　C_1 を中心 $(0,\ 0)$，半径1の円とし，C_2 を中心 $(0,\ 0)$，半径 $r>1$ の円とする．$ad-bc>0$ を満たす行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で表される1次変換により円 C_1 が円 C_2 に移るとする．次の問いに答えよ．

問 1　$a^2+c^2=b^2+d^2=r^2$，$ab+cd=0$ が成り立つことを示せ．

問 2　$a=r\cos\theta$，$c=r\sin\theta$（θ は実数）とおくとき，b，d を r，θ を用いて表せ．

問 3　$B=\dfrac{1}{r}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする．また，C_1 に外接し，C_2 に内接する8個の相異なる円 S_1，S_2，…，S_8 が次の3条件(i)，(ii)，(iii)を満たしているとする．このとき，r を求めよ．

(i)　行列 B で表される1次変換により S_i（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ 7$）は S_{i+1} に，S_8 は S_1 に移る．

(ii)　S_{i+1}（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ 7$）は S_i に外接し，S_8 は S_1 にも外接する．

(iii)　S_1 は S_3，S_4，…，S_7 と交わらない．

問題 3　a を正の実数とし，$f_n(x)=\int_0^x e^{-at}\sin nt\,dt$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．

問 1　$\lim_{x\to\infty} f_n(x)$ を求めよ．

問 2　$a=\dfrac{3}{2}$ とするとき，$\lim_{x\to\infty} f_n(x)$ が最大となる自然数 n，およびそのときの最大値を求めよ．

問題 4　曲線 $C: y=\log x$ 上に異なる 2 点 $\mathrm{A}(a,\ \log a)$，$\mathrm{B}(b,\ \log b)$ をとり，C の A における接線と B における接線の交点について考える．次の問いに答えよ．

問 1　任意に与えられた $a>1$ に対して，2 本の接線の交点がちょうど直線 $x=1$ 上にくるような b が唯一つだけ存在し，$b<1$ であることを示せ．

問 2　2 点 $\mathrm{A}(a,\ \log a)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{a},\ \log\dfrac{1}{a}\right)$ $(a>1)$ について，2 本の接線の交点の x 座標が 1 より大きいか小さいかを調べよ．

問 3　k を自然数とする．$a=1+\dfrac{1}{k}$ として問 2 の結果を使って，次の不等式が成りたつことを示せ．

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}>\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)+\log n \qquad (n\geqq 2)$$