平 成 24 年 度

数 学

注意事項

1. 問題は 3 題で，$\boxed{1}$ と $\boxed{2}$ は必答問題，$\boxed{3}$ は選択問題です。
2. 解答はすべて別紙(解答用紙 3 枚)の該当する欄に記入しなさい。また，解答用紙(その 3)の**選択欄**に，問題 $\boxed{3}$ の $\boxed{A}$ か $\boxed{B}$ のうち，どちらを選択したか，必ず明記しなさい。
3. 解答用紙の裏面を使用する場合は，表面の右下に「裏面に続く」と記入し，表面の下の部分を持って上にめくり記入しなさい。表面とは上下が反対になります。
4. **図**や**グラフ**は解答の中で重要な位置をしめます。その特徴をおさえて，ていねいに描きなさい。
5. 解答者がたどる道筋や問題解決に至る要点を明確に意識して，**論述式**の答案を読みやすく書きなさい。
6. 問題用紙の余白は，下書きや**ミスのない計算**のために十分活用しなさい。

$\boxed{1}$ （必答問題）（配点　70点）

関数$f(x) = 1 + \sin x + \sin^2 x$（$0 \leqq x \leqq 2\pi$）を考える。以下の問いに答えよ。

(1) $y = f(x)$の増減表を作成し，極値を求めよ。

(2) $x = \dfrac{5}{12}\pi$のとき，和$\sin x + \cos x$と積$\sin x \cos x$の値をそれぞれ求めよ。

(3) 次の不等式(i)，(ii)がそれぞれ成り立つことを証明せよ。また，等号がいつ成立するか，それぞれ調べよ。

(i) $f(x) \geqq \sin x\,(1 + \sqrt{2} + \cos x)$　$(0 \leqq x \leqq \pi)$

(ii) $(\sin x + \cos x)\left(\dfrac{7}{4} - \sin x \cos x\right) \leqq \left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$　$\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$

2 （必答問題）（配点　65 点）

24 時間診療業務を休みなく行う病院において，40 日間で 1 万個使用される医療材料 A について考える。A の使用頻度は常に一定であり，1 日の時間帯や曜日による変動は全くないものとする。

さて，病院における在庫管理では，「品切れ」が起きないこと，「コスト」をできるだけ低くすること，この 2 つが肝要である。医療材料 A の保管費は，その保管期間に比例し，1 個につき 10 日間で 1 円である。また，納入業者に A を注文すれば，注文量の多少に関わらず，品物が届いた時点で 200 円の事務費がかかる。なお，担当者は A の在庫量 y の時間的推移を把握しており，品切れになる直前という最適のタイミングで，注文した量が届くものとする。

われわれは，保管費と事務費の和 S を最小にするような注文の仕方を求める。以下の問いに答えよ。

(1) A の在庫は最初 1 万個あったとする。そして注文する量は毎回一定として，x で表す。このとき，時間 t による在庫量 y の変化を表すグラフを，横軸を時間の t 軸とする座標平面上に図示せよ。（図示する際には，適当な x の値を自ら設定すること。）

以下，1 回目の注文によって品物の届く時点以降の y の変化について考察する。

(2) 周期的な y の変動に留意して，平均在庫量を求めよ。

(3) 長期にわたる保管費，事務費の総額をそれぞれ見積もり，保管費と事務費の和 S の「1 日当たりの平均コスト」を求めよ。さらに，この 1 日当たりの平均コストを最小にするような x の値を求めよ。

3 （選択問題）（配点　65 点）

A か **B** のうち，どちらか 1 つを選択して，解答せよ。解答用紙(その 3)の**選択欄**に，どちらを選択したか，必ず明記すること。

A n は自然数を表すとして，以下の問いに答えよ。

(1) 平面を次の条件を満たす n 個の直線によって分割する。

【どの直線も他のすべての直線と交わり，どの 3 つの直線も 1 点で交わらない。】

このような n 個の直線によって作られる領域の個数を $L(n)$ とすると，$L(1)=2$，$L(2)=4$ は容易にわかる。次の問いに答えよ。

(i) $L(3)$，$L(4)$，$L(5)$ をそれぞれ求めよ。

(ii) $L(n)$ の漸化式を求めよ。

(iii) $L(n)$ を求めよ。

(2) 平面を次の条件を満たす n 個の円によって分割する。

【どの円も他のすべての円と 2 点で交わり，どの 3 つの円も 1 点で交わらない。】

このような n 個の円によって作られる領域の個数を $D(n)$ とすると，$D(1)=2$ は容易にわかる。次の問いに答えよ。

(i) $D(2)$，$D(3)$，$D(4)$ をそれぞれ求めよ。

(ii) $D(n)$ の漸化式を求めよ。

(iii) $D(n)$ を求めよ。

B 1個のさいころを3回投げる。1回目，2回目，3回目に出る目の数をそれぞれX_1，X_2，X_3として，3つの確率変数

$$Y = 4X_1 + X_2,\ Z_1 = 2X_1 + 3X_2,\ Z_2 = 2X_1 + 3X_3$$

を定める。1から6までの目は等確率で出るものとするとき，以下の問いに答えよ。

(1) 数の集合$U = \{x \mid x$は整数かつ$5 \leqq x \leqq 30\}$を全体集合として，

$$S = \left\{ x \mid x \in U \text{ かつ } P(Y = x) > \frac{1}{36} \right\}$$

$$T = \left\{ x \mid x \in U \text{ かつ } P(Z_1 = x) > \frac{1}{36} \right\}$$

を定める。部分集合SとTの要素をそれぞれ列挙せよ。

(2) Yの値がSに属するという事象をAとし，$i = 1, 2$に対してZ_iの値がTに属するという事象をB_iとする。次の問いに答えよ。

(i) $i = 1, 2$に対し，等式$P(A \cap B_i) = P(A)P(B_i)$が成り立つかどうか，それぞれ調べよ。

(ii) 条件つき確率$P_A(B_1 \cap B_2)$の定義式をかき，その値を求めよ。