

平成 24 年度入学者選抜個別(第 2 次)学力検査問題

数 学

(医 学 科)

注 意 事 項

1. 監督者の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
2. 問題冊子は、全部で 8 ページあります。
3. 解答用紙は、問題冊子と別に印刷されているので、誤らないように注意しなさい。
4. 解答用紙には、必ず解答の過程と結果を記入しなさい。
5. 解答は、必ず解答用紙の点線より左に記入しなさい。
6. 下書は、各問題の余白を利用し、なお不足する場合は、問題冊子の第 1 ページの表裏と第 4 ページの裏から第 8 ページの裏まで使用しなさい。ただし、切り離してはいけません。
7. 各解答用紙には、受験番号欄が 2 カ所ずつあります。それぞれ記入を忘れないこと。
8. 解答用紙は、記入の有無にかかわらず、机上に置き、持ち帰ってはいけません。この冊子は持ち帰りなさい。
9. 落丁または印刷の不鮮明な箇所があれば申し出なさい。

1 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を次のように定義する。

$$\begin{cases} a_1 = 5, b_1 = 3, \\ \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

また、自然数 n について $c_n = a_n^2 - b_n^2$ とおく。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) c_n を n を用いて表せ。

(2) k を自然数とすると、自然数 ℓ について

$$a_{k+\ell} = a_k a_\ell + b_k b_\ell, \quad b_{k+\ell} = b_k a_\ell + a_k b_\ell$$

が成立することを、 ℓ に関する数学的帰納法によって示せ。

(3) $n > \ell$ となる自然数 n, ℓ について

$$b_{n+\ell} - c_\ell b_{n-\ell} = 2 a_n b_\ell$$

が成立することを示せ。

(4) 2 以上の自然数 n について

$$a_{2n} + \sum_{m=1}^{n-1} c_{n-m} a_{2m} = \frac{b_{2n+1}}{2b_1} - \frac{c_n}{2}$$

が成立することを示せ。

2 $a^2 + b^2 = 1$ を満たす正の実数 a, b の組 (a, b) の全体を S とする。 S に含まれる (a, b) に対し、 xyz 空間内に 3 点 $P(a, b, b)$, $Q(-a, b, b)$, $R(0, 0, b)$ をとる。また原点を O とする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) 三角形 OPQ を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体を F_1 とする。 (a, b) が S の中を動くとき、 F_1 の体積の最大値を求めよ。

(2) 三角形 PQR を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体を F_2 とする。
 $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき、 F_2 の xy 平面による切り口の周を xy 平面上に図示せよ。

(3) 三角形 OPR を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体を F_3 とする。 (a, b) が S の中を動くとき、 F_3 の体積の最大値を求めよ。

3

関数 $f(x) = x^3 - x^2 + x$ について、以下の各問いに答えよ。

(1) $f(x)$ はつねに増加する関数であることを示せ。

(2) $f(x)$ の逆関数を $g(x)$ とおく。 $x > 0$ について

$$\sqrt[3]{x} - 1 < g(x) < \sqrt[3]{x} + 1$$

が成立することを示せ。

(3) $b > a > 0$ について

$$0 < \int_a^b \frac{1}{x^2 + 1} dx < \frac{1}{a}$$

が成立することを示せ。

(4) 自然数 n について、(2) で定義された $g(x)$ を用いて

$$A_n = \int_n^{2n} \frac{1}{\{g(x)\}^3 + g(x)} dx$$

とおくとき、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ を求めよ。