数　　　学

1. 監督者の指示があるまで開いてはいけない。
2. 解答は別紙の解答用紙に記入しなさい。
3. 問題用紙は各科目の試験終了後持ち帰ってもよい。
   ただし，試験途中では持ち出してはいけない。

1. 次の問いに答えよ。問い (1) ～ (3) については，$\boxed{}$ にあてはまる適切な数値を解答欄に記入せよ。

(1) x の 2 次不等式

$$6x^2 - (16a+7)x + (2a+1)(5a+2) < 0$$

をみたす整数 x が 10 個となるように，正の整数 a の値を定めると $a = \boxed{\text{(ア)}}$ である。

(2) 三角形 ABC において，$\mathrm{AB} = \sqrt{2}$，$\mathrm{BC} = 2$，$\mathrm{CA} = \sqrt{3}$ とし，外心を O とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AO}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ をみたす実数 s，t の値は $s = \boxed{\text{(イ)}}$，$t = \boxed{\text{(ウ)}}$ である。

(3) 袋 A には赤玉 2 個と白玉 1 個，袋 B には赤玉 1 個と白玉 2 個が入っている。袋 A から玉を 2 個取り出して袋 B に入れ，よくかき混ぜて，袋 B から玉を 2 個取り出して袋 A に入れる。このとき，袋 A に入っている白玉の個数を X とすると，$X = 0$ となる確率は $\boxed{\text{(エ)}}$ であり，$X = 2$ となる確率は $\boxed{\text{(オ)}}$ である。

(4) 関数 $f(x) = |x^3|$ が $x = 0$ で微分可能であるかどうか調べよ。

2. a を実数とする。xy 平面上の 2 曲線

$$C_1 : y = e^x, \qquad C_2 : y = -e^{1-x} + a$$

を考える。

C_1 上の点 $\mathrm{P}(t,\ e^t)$ $(t > 0)$ における C_1 の接線 ℓ_t が，C_2 上の点 $\mathrm{Q}(s,\ -e^{1-s}+a)$ における C_2 の接線にもなっているとき，次の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底である。

(1) t と s の関係式を求めよ。また，a を t を用いて表せ。

(2) C_1，ℓ_t および y 軸で囲まれた部分の面積を $S_1(t)$ とし，C_2，ℓ_t および y 軸で囲まれた部分の面積を $S_2(t)$ とする。ただし，Q が y 軸上にあるときは $S_2(t) = 0$ とする。

(i) $S_1(t)$，$S_2(t)$ を t を用いて表せ。

(ii) $S(t) = S_1(t) + S_2(t)$ とする。t が $t > 0$ の範囲を動くとき，t の関数 $S(t)$ の最小値を求めよ。

3. nを3以上の整数とする。xyz空間の平面$z=0$上に，1辺の長さが4の正n角形Pがあり，Pの外接円の中心をGとおく。半径1の球Bの中心がPの辺に沿って1周するとき，Bが通過してできる立体をK_nとする。

このとき，次の問いに答えよ。

(1) Pの隣り合う2つの頂点$\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$をとる。Gから辺$\mathrm{P_1P_2}$に下ろした垂線と$\mathrm{P_1P_2}$との交点をQとするとき，$\mathrm{GQ}>1$となることを示せ。

(2) (i) K_nを平面$z=t$ $(-1\leqq t\leqq 1)$で切ったときの断面積$S(t)$をtとnを用いて表せ。

(ii) K_nの体積$V(n)$をnを用いて表せ。

(3) Gを通り，平面$z=0$に垂直な直線をℓとする。K_nをℓのまわりに1回転させてできる立体の体積$W(n)$をnを用いて表せ。

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{V(n)}{W(n)}$を求めよ。