2012 年度入学試験問題

数　学（問　題）

注　意

1) 数学の問題冊子は４ページあり，問題は４題である。白紙・空白の部分は計算・下書きに使用してよい。

2) 別に解答用紙１枚があり，解答はすべてこの解答用紙の指定欄に記入すること。指定欄以外への記入はすべて無効である。

3) **解答用紙の所定欄に受験番号を記入せよ。氏名を記入してはならない。また，※印の欄には何も記入してはならない。**

4) 問題冊子，解答用紙はともに持ち出してはならない。

5) 途中退場または試験終了時には，解答が他の受験生の目に触れないよう，解答用紙の上に問題冊子を重ねて，監督者の許可を得た後に退出すること。

I　(1)〜(6)の $\boxed{}$ 中に，あてはまる数，角度，整式，不等式，記号，語句などを記入せよ。

(1)　以下の括弧に正しい数を記入せよ。

(i)　$a = \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$，$b = \dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ であるとき，

$a + b = \boxed{\text{ア}}$，$a^2 + ab + b^2 = \boxed{\text{イ}}$

(ii)　$x^4 + y^4 = (x+y)^4 + \boxed{\text{ウ}}\, xy(x+y)^2 + \boxed{\text{エ}}\, x^2y^2$

(2)　次の式を因数分解せよ。

(i)　$15x^2 + 2xy - 24y^2 = \boxed{\text{オ}}$

(ii)　$(ac+bd)^2 - (ad+bc)^2 = \boxed{\text{カ}}$

(3)　ベクトル $\vec{p} = (1,\ 3)$，$\vec{q} = (1,\ -1)$ と実数 t によって，$\vec{a} = \vec{p} + t\vec{q}$ を定義する。t の値が変化するとき，$\vec{a}$ の大きさは $t = \boxed{\text{キ}}$ において最小になる。そのときのベクトル $\vec{a}$ とベクトル $\vec{p}$ のなす角は 30° より $\boxed{\text{ク}}$ 。ただし，括弧クには「大きい」または「小さい」のいずれかを記入せよ。

(4)　n，m はいずれも自然数とし，$a_n = 1 + 2 + 3 + \cdots\cdots + n$ とする。このとき，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots\cdots + \frac{1}{a_n}\right) = \boxed{\text{ケ}}$$

$$\lim_{m\to\infty}\left(a_1 \times \frac{1}{a_2}\right) \times \left(a_3 \times \frac{1}{a_4}\right) \times \cdots\cdots \times \left(a_{2m-1} \times \frac{1}{a_{2m}}\right) = \boxed{\text{コ}}$$

(5)　3辺の長さがそれぞれ 2，$\sqrt{2}-1$，$\sqrt{5}$ の三角形がある。この三角形の最大角の大きさは $\boxed{\text{サ}}$ であり，三角形の面積は $\boxed{\text{シ}}$ である。また，三角形に内接する円の半径は $\boxed{\text{ス}}$ である。

(6)　$x = 1 + \sqrt{2}$ とする。実数 y に対して $x + y$，xy がともに有理数ならば，$y = \boxed{\text{セ}}$ である。また，x^2，x^3，x^4，…… の中に有理数が $\boxed{\text{ソ}}$ 。ただし，括弧ソには「ある」または「ない」のいずれかを記入せよ。

Ⅱ　a, b は実数, n は自然数とし, 行列 $A = \begin{pmatrix} a+3b & 2b \\ -4b & a-3b \end{pmatrix}$, および

$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ を考える。

（問 1）　行列 P^{-1} および $P^{-1}AP$ を求めよ。ただし, P^{-1} は P の逆行列を表す。

（問 2）　行列 A^n を求めよ。

（問 3）　$A^n = \begin{pmatrix} p_n & q_n \\ r_n & s_n \end{pmatrix}$ と表す。$n \to \infty$ のとき, 4つの数列 $\{p_n\}$, $\{q_n\}$, $\{r_n\}$, $\{s_n\}$ がすべて収束するための必要十分条件を a, b を用いて表せ。そして, その条件を満たす点 $(a,\ b)$ 全体の集合を座標平面上に図示せよ。

Ⅲ　$a>0$，$a\neq 1$ とする。座標平面上で $y=2\sqrt{x}$ $(x\geqq 0)$ で定義される曲線を C とし，C 上に点 $\mathrm{A}(a,\ 2\sqrt{a})$ をとる。

(問 1)　曲線 C 上の点 A における法線 L の方程式を求めよ。ここで，L は点 A における曲線 C の接線に直交する。

(問 2)　点 P は直線 $y=2\sqrt{a}$ 上を動く動点とし，(問 1)の法線 L に関して，点 P と対称な点が描く軌跡を直線 ℓ とする。ℓ の方程式を求めよ。

(問 3)　(問 2)で定義した直線 ℓ は，a の値に関係なく定点を通る。その定点の座標を記せ。

(問 4)　曲線 C，直線 ℓ，および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

Ⅳ　n，k は $1 \leqq k \leqq n$ を満たす整数とする。箱の中に，１から n までの番号が１つずつ書かれた n 枚の札がある。この箱から無作為に k 枚の札を同時に取り出し，取り出した札に書かれた番号の総和 Y を求めてから，札をすべて箱の中に戻すという操作を繰り返す。n 枚の札は書かれた番号以外では区別がつかないものとする。

(問 1)　n 枚の札から k 枚の札を同時に取り出す取り出し方は何通りあるか。また，それらの取り出し方の中で，１つの番号 i が書かれた札が含まれる取り出し方は何通りあるか。ただし，i は $1 \leqq i \leqq n$ を満たす任意の整数とする。

(問 2)　変量 X_i ($i = 1$，2，3，……，n)を，取り出した k 枚の札の中に番号 i の書かれた札があるとき $X_i = 1$，ないとき $X_i = 0$ という値をとる量と定義する。X_i の期待値(平均)$E(X_i)$を求めよ。

(問 3)　(問 2)で定義した変量を用いると，

$Y = 1 \times X_1 + 2 \times X_2 + 3 \times X_3 + \cdots\cdots + n \times X_n$ と表すことができる。

Y の期待値(平均)$E(Y)$を求めよ。