

平成 24 (2012) 年度

慶應義塾大学入学試験問題

医 学 部

数 学

注意事項

1. 受験番号と氏名は解答用紙の所定の記入欄にそれぞれ記入してください。
2. 受験番号は所定欄の枠の中に1字1字記入してください。
3. 解答は、必ず解答用紙の所定の欄に記入してください。
4. この問題冊子の余白を計算および下書きに用いてください。
5. この問題冊子の総ページ数は12ページです。試験開始の合図とともにすべてのページが揃っているかどうか確認してください。ページの脱落や重複があったら直ちに監督者に申し出てください。
6. この問題冊子は、試験終了後に持ち帰ってください。

— 下書き計算用 —

— 下書き計算用 —

[I]

以下の文章の空欄に適切な数、式または行列を入れて文章を完成させなさい。ただし設問(2)において、適切な行列が複数個ある場合は、それらをすべて記入しなさい。

(1)  $a_1=1, a_2=4, a_{n+2}=-a_{n+1}+2a_n$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) によって定められる数列  $\{a_n\}$  の一般項は  $a_n =$   である。

(2) 行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  の表す1次変換により点  $B(1, 1)$  と点  $C(1, 0)$  はそれぞれ点  $B'$  と点  $C'$  に移されるとする。また  $O(0, 0)$  を原点とする。 $\overrightarrow{OB'} = 2\overrightarrow{OB}$ , かつ  $\triangle OB'C'$  が正三角形となるような行列  $A$  をすべて求めると  $A =$   である。

(3) 媒介変数  $t$  を用いて

$$\begin{cases} x = \frac{e^t + 3e^{-t}}{2} \\ y = e^t - 2e^{-t} \end{cases}$$

と表される曲線  $C$  の方程式は

$$\text{(う)} x^2 + \text{(え)} xy + \text{(お)} y^2 = 25$$

である。

また曲線  $C$  の接線の傾きは、 $t =$   に対応する点において  $-2$  となる。

(4)  $\alpha > 1$  を実数とする。 $0 \leq x \leq 1$  を定義域とする関数  $f(x) = x - x^\alpha$  が最大値をとる点を  $x(\alpha)$  とすると  $x(\alpha) =$   である。また  $\lim_{\alpha \rightarrow 1+0} x(\alpha) =$   である。

— 下書き計算用 —

[II]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

$xy$  平面上で点  $P$  は  $x$  軸上に、点  $Q$  は  $y$  軸上に置かれ、点  $P$  の  $x$  座標と点  $Q$  の  $y$  座標はそれぞれ  $-2$  以上  $2$  以下の整数であるとする。点  $P, Q$  に対して次の操作を考える。

操作

点  $P$  の座標が  $(i, 0)$ 、点  $Q$  の座標が  $(0, j)$  であるとき次の規則に従って 2 点  $P, Q$  を互いに独立に同時に処理する。

(P1)  $-1 \leq i \leq 1$  ならば点  $P$  を  $(i+1, 0)$  または  $(i-1, 0)$  のどちらかに確率  $\frac{1}{2}$  ずつで移す。

(P2)  $i = -2$  ならば点  $P$  を必ず  $(-1, 0)$  に移す。

(P3)  $i = 2$  ならば点  $P$  をそのままにしておく。

(Q1)  $-1 \leq j \leq 1$  ならば点  $Q$  を  $(0, j+1)$  または  $(0, j-1)$  のどちらかに確率  $\frac{1}{2}$  ずつで移す。

(Q2)  $j = -2$  ならば点  $Q$  を必ず  $(0, -1)$  に移す。

(Q3)  $j = 2$  ならば点  $Q$  をそのままにしておく。

さて、2 点  $P, Q$  がともに  $(0, 0)$  に置かれている状態から始め、上の操作を 3 回繰り返す行う。

(1) 3 回の操作の後、点  $P$  が  $(1, 0)$  に置かれている確率は  であり、 $(-1, 0)$  に置かれている確率は  である。

(2)  $xy$  平面上で不等式  $y > x$  の表す領域を  $A$ 、不等式  $y > -x$  の表す領域を  $B$  とする。各回の操作後に点  $P$  が常に  $A \cup B$  内に置かれているという事象を  $U$  とし、各回の操作後に点  $Q$  が常に  $A \cup B$  内に置かれているという事象を  $V$  とすると、事象  $U \cup V$  の確率は  である。

$xy$  平面上で 2 点  $P, Q$  を結ぶ線分の長さを  $PQ$  とする。ただし 2 点  $P, Q$  がともに  $(0, 0)$  に置かれている場合は  $PQ = 0$  とする。

(3) 3 回の操作を通じてちょうど 1 回だけ  $PQ = \sqrt{2}$  となる確率は  である。

(4) 3 回の操作を通じた  $PQ$  の最大値の期待値は  である。

— 下書き計算用 —

[Ⅲ]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。ただし設問(2)において、適切な  $t$  の値が複数個ある場合は、それらをすべて記入しなさい。

放物線  $y = x^2$  を  $C$  とする。  $C$  上に点  $P(-1, 1)$  をとり、  $P$  における  $C$  の法線と  $C$  との交点のうち、  $P$  と異なるものを  $Q$  とする。 また  $t$  を実数として、 点  $P$  をとおって傾きが  $t$  の直線を  $l_1$  とし、 点  $Q$  をとおって  $l_1$  と直交する直線を  $l_2$  とする。  $l_1$  と  $l_2$  の交点を  $R$  とする。

(1) 点  $Q$  の座標は  $(\boxed{\text{あ}}, \boxed{\text{い}})$  である。

(2) 点  $R$  が点  $P, Q$  と異なるように  $t$  を変化させるときの  $\triangle PQR$  の面積の最大値は  $\boxed{\text{う}}$  である。 また  $\triangle PQR$  の面積を最大にする  $t$  の値をすべて求めると  $t = \boxed{\text{え}}$  である。

(3) 点  $P, Q$  とは異なる  $C$  上の点  $T(u, u^2)$  を考える。  $\overrightarrow{TP} \cdot \overrightarrow{TQ} < 0$  となるような  $u$  の範囲は

$$\boxed{\text{お}} < u < \boxed{\text{か}}$$

である。

(4) 点  $R$  が、不等式  $y < x^2$  の表す領域に入るような  $t$  の範囲は

$$\boxed{\text{き}} < t < \boxed{\text{く}}$$

である。



— 下書き計算用 —

2

1  
+

[IV]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

(1)  $0 \leq \alpha < \beta \leq \frac{\pi}{2}$  かつ  $R > 0$  とする。極座標  $(r, \theta)$  に関する条件

$$0 \leq r \leq R, \quad \alpha \leq \theta \leq \beta$$

により定まる図形を  $x$  軸のまわりに回転させて得られる立体の体積を  $T$  とする。 $T$  を  $\alpha, \beta, R$  を用いた式で表すと

$$T = \boxed{\text{(あ)}}$$

である。

(2) 極方程式  $r = f(\theta)$  ( $0 \leq \theta \leq \alpha$ ) で表される曲線  $C$  と、 $\theta = \alpha$  で表される直線  $l$  および  $x$  軸の正の部分で囲まれた図形を  $S$  とする。ただし  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  とし、関数  $f(\theta)$  は連続かつ  $f(\theta) > 0$  をみたし、 $0 \leq \theta \leq \alpha$  において増加または減少または定数とする。

$S$  を  $x$  軸のまわりに回転させて得られる立体の体積を  $V(\alpha)$  とすると

$$\frac{d}{d\alpha} V(\alpha) = \boxed{\text{(い)}}$$

であり、したがって

$$V(\alpha) = \boxed{\text{(う)}}$$

である。また  $S$  を直線  $l$  のまわりに回転させて得られる立体の体積を  $W(\alpha)$  とすると

$$W(\alpha) = \boxed{\text{(え)}}$$

である。

(3) (2) において  $f(\theta) = \sqrt[3]{\cos \theta}$  とするとき  $V\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ,  $W\left(\frac{\pi}{4}\right)$  の値を求めると

$$V\left(\frac{\pi}{4}\right) = \boxed{\text{(お)}}, \quad W\left(\frac{\pi}{4}\right) = \boxed{\text{(か)}}$$

である。

— 下書き計算用 —

