平成24年度入学試験問題

数　　学

Ⅰ 注 意 事 項

1. 指示があるまで，この冊子の中を見てはいけません。
2. 設問はⅠからⅣまであります。
3. 解答用紙には解答欄の他に次の記入欄があるので，正確に記入しなさい。
   ① 氏名欄……………………氏名を記入しなさい。
   ② 受験番号欄………………受験番号（6桁の数字）を記入し，受験番号をマーク欄に必ずマークしなさい。
4. マークにはＨＢの鉛筆を使用し，次の例のように，濃く正しくマークしなさい。

   良い例………

   悪い例………

5. 正確にマークされていない場合，採点できないことがあります。
6. 答えを修正する場合は必ず「プラスチック製消しゴム」で完全に消し，消しくずを解答用紙上に残してはいけません。
7. 中途退場は認めません。
8. 試験中に質問がある場合は，手をあげて申し出なさい。
9. この冊子の余白を計算に用いてかまいません。
10. 試験終了後，この問題冊子は持ち帰りなさい。

Ⅱ 解答上の注意

解答上の注意が裏表紙に記載してあるので，この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし，冊子を開いてはいけません。

問題は次のページから始まります。

I $\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{キ}}$ の解答はそれぞれの解答群の中から最も適当なものを1つずつ選べ.

袋の中に，1から13までの数字が書かれたカードが1枚ずつ入っている．この袋から3枚のカードを同時に取り出して，カードに書かれた数字を小さい方から順にx，y，zと定め，カードを袋に戻すという操作を行う．このような操作によって取りうるすべての整数の組$(x,\ y,\ z)$を，重複なく集めてできる集合

$$U=\{(x,\ y,\ z)\mid x,\ y,\ z\text{ はカードを取り出して定められる数}\}$$

を全体集合と定める．また，集合Uの部分集合P，Qをそれぞれ

$$P=\{(x,\ y,\ z)\mid z>x+y,\ (x,\ y,\ z)\in U\},$$
$$Q=\{(x,\ y,\ z)\mid z<x+y,\ (x,\ y,\ z)\in U\}$$

とする.

(a) 集合Uの要素の個数は $\boxed{\text{アイウ}}$ である．また，$\overline{P}\cap\overline{Q}$に含まれる要素の個数は $\boxed{\text{エオ}}$ である.

(b) 集合Uの要素$(x,\ y,\ z)$を

$$\begin{cases} x'=z-y \\ y'=z-x \\ z'=z \end{cases}$$

で表わされる$(x',\ y',\ z')$に移す変換をfとする．このとき，集合Pの要素pの変換fによる像p'はp' $\boxed{\text{カ}}$ を満たし，p'の変換fによる像p''はp'' $\boxed{\text{キ}}$ となる.

また，集合Qの要素の個数は $\boxed{\text{クケコ}}$ である.

$\boxed{\text{カ}}$ の解答群

① $\in P$　② $\in Q$　③ $\in\overline{P}$
④ $\in\overline{Q}$　⑤ $\in\overline{P}\cap\overline{Q}$　⑥ $\notin U$

$\boxed{\text{キ}}$ の解答群

① $\in Q$　② $\in\overline{P}$　③ $\in\overline{Q}$　④ $\in\overline{P}\cap\overline{Q}$
⑤ $\notin U$　⑥ $=p$　⑦ $=p'$

(c) 3辺の長さがそれぞれx，y，zである直角三角形を作ることができる$(x,\ y,\ z)$の組は $\boxed{\text{サ}}$ 通りある．また，$z=13$の場合，3辺の長さがx，y，zである鋭角三角形を作ることができる$(x,\ y,\ z)$の組は $\boxed{\text{シス}}$ 通りである.

II $\boxed{\text{タ}}$ の解答は解答群の中から最も適当なものを1つ選べ.

一辺の長さが2である正五角形OABCDにおいて, $\vec{a}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{d}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$, $k=|\overrightarrow{\mathrm{DA}}|$ とする.

(a) $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}}$ と $|\overrightarrow{\mathrm{DB}}|=k$ より,

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=k\vec{a}+\boxed{\text{ア}}\,\vec{d}$$

が成り立つ. また,

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\boxed{\text{イ}}\,\vec{a}+k\vec{d}$$

と表せる.

(b) $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=k$ より,

$$k=\boxed{\text{ウ}}+\sqrt{\boxed{\text{エ}}},\quad \vec{a}\cdot\vec{d}=\frac{\boxed{\text{オ}}-\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キ}}}$$

となる.

また, 直線OAと直線BCの交点をEとすると,

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\left(\boxed{\text{ク}}+\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}\right)\vec{a}$$

であり, 点Eは線分BCを $2:\boxed{\text{コ}}+\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$ に外分する.

(c) 正五角形OABCDの内接円の半径を α とすると,

$$\alpha^2=\boxed{\text{シ}}+\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$$

である. 点Oを極とし, 半直線 $t\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,(t\geqq 0)$ を始線としたとき, 極座標 $(r,\ \theta)$ を用いて直線ADの極方程式は $r=\boxed{\text{タ}}$ と表わされる.

$\boxed{\text{タ}}$ の解答群

① $2\cos\theta+\dfrac{2}{\alpha}\sin\theta$　② $2\cos\theta-\dfrac{2}{\alpha}\sin\theta$　③ $2\cos\theta+2\alpha\sin\theta$

④ $2\cos\theta-2\alpha\sin\theta$　⑤ $\dfrac{2\alpha}{\alpha\cos\theta+\sin\theta}$　⑥ $\dfrac{2\alpha}{\alpha\cos\theta-\sin\theta}$

⑦ $\dfrac{2}{\cos\theta+\alpha\sin\theta}$　⑧ $\dfrac{2}{\cos\theta-\alpha\sin\theta}$

III　$0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$ を満たす θ と正の実数 p に対して，$a_1=\log_4(p\sin\theta)$，$a_2=\log_4(\sin 2\theta)$，$a_3=\log_4(\sin 3\theta)$ とする．

(a)　$a_1=a_2=a_3$ となるのは，

$$p=\frac{\boxed{\text{ア}}+\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}},\quad \theta=\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\pi$$

のときである．

(b)　3つの数 a_1，a_2，a_3 がこの順に等差数列をなしているとする．このとき，

$$p>\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$$

となる．p をこの範囲で変化させたとき，a_2+a_3 が最大となるのは，

$$\cos^2\theta=\frac{\boxed{\text{クケ}}+\sqrt{\boxed{\text{コサシ}}}}{\boxed{\text{スセ}}},\quad p=\frac{\boxed{\text{ソ}}+\sqrt{\boxed{\text{コサシ}}}}{\boxed{\text{タチ}}}$$

のときである．

(c)　$p=2$ で，a_1，a_2，a_3 がこの順に等差数列をなしているとき，この数列の初項 a_1 および公差 d は

$$a_1=\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}},\quad d=\frac{\boxed{\text{トナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$$

である．この初項と公差を持つ等差数列 $\{a_k\}$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ に対して，極限値

$$\alpha=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}2^{2a_k}$$

を定義すると，α は2次方程式

$$x^2-\boxed{\text{ヌ}}\,x-\boxed{\text{ネ}}=0$$

の解となっている．

Ⅳ 座標平面上の点 P$(x,\ y)$が $t \geqq 0$ に対して

$$x = 1 - e^{-3t},\quad y = 8 - 3t - 8e^{-3t}$$

で表されるとき，以下の問いに答えよ．

(a) $t \to \infty$ のとき x の極限値は

$$\lim_{t \to \infty} x = \boxed{\text{ア}}$$

であり，$t = 0$ のとき

$$\frac{dy}{dt} = \boxed{\text{イウ}}$$

となる．また，任意の t に対して

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \boxed{\text{エ}}\ \frac{dx}{dt} = \boxed{\text{オ}},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \boxed{\text{カ}}\ \frac{dy}{dt} = \boxed{\text{キク}}$$

が成り立つ．

(b) $\dfrac{dy}{dx} = 0$ となる t の値を α とすると，$e^{\alpha} = \boxed{\text{ケ}}$ となる．このときの x の値を β とすると，$\beta = \dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ であり，y の値は $\boxed{\text{シ}} - \boxed{\text{ス}}\ \alpha$ である．

(c) $0 \leqq t \leqq \alpha$ に対して点Pの描く曲線と，直線 $x = \beta$ および x 軸で囲まれた部分の面積は

$$\frac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タチ}}} + \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}\ \alpha$$ となる．

Ⅱ 解答上の注意

1 問題の文中の $\boxed{\text{ア}}$ ， $\boxed{\text{イウ}}$ などには，特に指示がないかぎり，数字(0～9)，または負の符号(－)が入ります。ア，イ，ウ，…の一つ一つは，これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙のア，イ，ウ，…で示された解答欄にマークして答えなさい。

例1 $\boxed{\text{アイ}}$ に－8と答えたいとき

ア	● ⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
イ	⊖ ⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ● ⑨

2 分数形で解答する場合は，既約分数(それ以上約分できない分数)で答えなさい。負の符号は分子につけ，分母につけてはいけません。

例2 $\dfrac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは，$\dfrac{-4}{5}$ として

ウ	● ⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
エ	⊖ ⓪ ① ② ③ ● ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
オ	⊖ ⓪ ① ② ③ ④ ● ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

3 根号を含む形で解答する場合は，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば，$\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$，$\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{クケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}$，$\boxed{\text{サ}}\sqrt{\boxed{\text{シ}}}$ に $2\sqrt{2}$，$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$，$6\sqrt{2}$ と答えるところを，$1\sqrt{8}$，$\dfrac{\sqrt{52}}{4}$，$3\sqrt{8}$ のように答えてはいけません。