前期日程試験

平成24年度医学科入学試験問題

数　　学

〔注意事項〕

1　監督者の指示があるまで，この冊子を開いてはいけない。

2　**解答用紙に受験番号と氏名を必ず記入すること。**

3　この問題冊子の本文は，４ページからなっている。落丁，乱丁及び印刷不鮮明な箇所等があれば，手をあげて監督者に知らせなさい。

4　この問題冊子の計算用紙と余白は，適宜下書きに使用してもよい。

5　解答は，すべて別紙「解答用紙」の指定された場所に記入すること。

6　この問題冊子は持ち帰ること。

$\boxed{1}$ xを実数とし，3辺の長さが $1, x$ および $2-x$ の三角形を考える。

(1) x の取り得る値の範囲を求めよ。

(2) 長さ1の辺と長さ x の辺のなす角の大きさを θ とするとき，$\cos\theta$ を x を用いて表せ。

(3) 三角形の面積を x を用いて表せ。

(4) 三角形を長さ x の辺のまわりに1回転させてできる立体の体積を $V(x)$ とおく。$V(x)$ の最大値とそのときの x の値を求めよ。

2 平面上に原点 O を外心とする△ABC があり

$$7\overrightarrow{\mathrm{OA}}+x\overrightarrow{\mathrm{OB}}+y\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{0}$$

が成り立っているとする。ただし $x>0$, $y>0$ とする。点 A を通り直線 OA に垂直な直線を l とする。直線 l は直線 BC と交わるとし，その交点を D とする。このとき点 C は線分 BD 上にあるとする。∠ADB の 2 等分線と辺 AB, 辺 AC との交点をそれぞれ P, Q とする。

(1) AP = AQ であることを証明せよ。

(2) △APQ が正三角形となる整数 x, y の組をすべて求めよ。

(3) △ABC と△APQ の面積をそれぞれ S_1, S_2 とする。(2)で求めた x, y のうち，$x+y$ が最大になるものについて，$\dfrac{S_2}{S_1}$ を求めよ。

$\boxed{3}$ 四面体ABCDがあり，辺ACと辺BDは辺ABに垂直であるとし，面ABCと面ABDは垂直に交わるとする。辺ABの長さを1とし，辺ACの長さをa，辺BDの長さをbとおく。次に，点Cを通り直線ABに垂直である平面をKとおく。四面体に内接する球の半径をrとおき，球の中心から平面Kに下ろした垂線の長さをcとおく。

(1) $\dfrac{r}{c}$をbを用いて表せ。

(2) rをa, bを用いて表せ。

(3) $a=1$とする。線分ABの中点を通り直線ABと垂直に交わる平面をHとおく。四面体に内接する球が平面Hと共有点を持たないようなbの範囲を求めよ。

$\boxed{4}$ 2 以上の整数 n に対し

$$I_n = \int_{2(n-1)\pi}^{2n\pi} \frac{1-\cos x}{x-\log(1+x)}\,dx$$

とおく。

(1) $I_n \leqq \dfrac{2\pi}{2(n-1)\pi - \log(1+2(n-1)\pi)}$ であることを証明せよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nI_n = 1$ であることを証明せよ。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x} = 0$ であることは証明なしに用いてよい。