

平成24年度

試験問題

# 数 学

## 【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 試験開始後、問題冊子、解答用紙の印刷不鮮明や汚れ、問題冊子の落丁・乱丁等に気付いたときは、手を挙げて監督者に知らせよ。
3. 監督者の指示に従い、解答用紙の受験番号欄に受験番号を記入せよ。受験番号欄は合計4箇所ある。受験番号未記入の解答用紙は採点されない。
4. 解答は所定の解答欄に記入せよ。表面で不足する場合は裏面に解答してもよい。解答用紙はどのページも切り離してはならない。
5. 試験時間は2時間である。
6. 試験終了後、問題冊子は持ち帰ってよい。

— 余白 —

(このページに問題はありません)

I 実数  $p, q$  に対して,  $x$  の 3 次関数  $f_{p,q}(x)$  を  $f_{p,q}(x) = x^3 + px + q$  によって定める. 実数  $p, q$  は, 3 次関数  $f_{p,q}(x)$  が以下の 3 条件を満たすような範囲を動くとする.

$$\text{条件 (1): } f_{p,q}(1) = 1 .$$

$$\text{条件 (2): } f'_{p,q}(0) < 0 \quad (\text{ただし, } f'_{p,q}(x) \text{ は } f_{p,q}(x) \text{ の導関数を表す.})$$

$$\text{条件 (3): } x \geq 0 \text{ のとき, } f_{p,q}(x) \geq 0 .$$

このとき, 定積分

$$I(p, q) = \int_0^1 f_{p,q}(x) dx$$

を最大にするような  $p, q$  の値, および  $I(p, q)$  の最大値を求めよ.

II  $n$  を 3 以上の整数とし,  $n$  個の整数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  は以下の 3 条件を満たすとする.

$$\text{条件 (1): } a_1 \geq 2 .$$

$$\text{条件 (2): } a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n .$$

条件 (3):  $1 \leq i < j \leq n$  を満たす任意の整数  $i, j$  に対して, 不等式

$$a_i + a_j > 0$$

が成り立つ.

このとき, 不等式

$$\sum_{i=1}^n a_i \geq n$$

が成り立つことを証明せよ. また, この不等式において等号が成り立つ場合の  $n$  の値, および  $n$  個の整数の組  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  をすべて求めよ.

III 各成分が0以下の整数からなる2行2列の行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

で,  $A^2 + A = E$  を満たすものをすべて求めよ.  
(ただし,  $E$  は単位行列を表す.)

IV 整数  $m$  が与えられたとき,  $x$  に関する整数係数の2つの整式  $f(x), g(x)$  が関係式

$$f(x) \equiv g(x) \pmod{m}$$

を満たすとは, 等式  $f(x) - g(x) = mh(x)$  を満たすような整数係数の整式  $h(x)$  が存在することである.

- (1)  $f(x), g(x), F(x), G(x)$  を整数係数の整式とする. もし, ある整数  $m$  について関係式  $f(x) \equiv g(x) \pmod{m}$ , かつ  $F(x) \equiv G(x) \pmod{m}$  が満たされるならば, 関係式  $f(x) + F(x) \equiv g(x) + G(x) \pmod{m}$ , かつ  $f(x)F(x) \equiv g(x)G(x) \pmod{m}$  が満たされることを証明せよ.
- (2) 正整数  $p (> 1)$  を素数とする.  $p$  より小さい任意の正整数  $i$  に対して二項係数  ${}_p C_i$  は  $p$  の倍数であることを証明せよ.
- (3) 正整数  $p (> 1)$  を素数とする. 任意の正整数  $n$  について, 関係式

$$(1+x)^{p^n} \equiv 1 + x^{p^n} \pmod{p}$$

が満たされることを証明せよ.

- (4) 正整数  $p (> 1)$  を素数とし,  $n$  を2以上の正整数とする.  $n-1$  個の二項係数  ${}_n C_i$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ) がすべて  $p$  の倍数であるための必要十分条件は, 整数  $n$  が素数  $p$  の正べきである (すなわち, 適当な正整数  $k$  を用いて  $n = p^k$  と表せる) ことを証明せよ.

— 余白 —

(このページ以降に問題はありません)