

1 平面上の点  $P(x, y)$  を

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

によって定められる点  $Q(X, Y)$  に移す移動を考える。ここで、 $a$  は実数とする。楕円  $C: x^2 + 4y^2 = 1$  が与えられているとき、次の問いに答えよ。

- (1) 点  $P(x, y)$  が楕円  $C$  上を動くとき、点  $Q(X, Y)$  は円  $D: X^2 + Y^2 = 1$  上を動くとする。このとき  $a$  の値を求めよ。
- (2) 点  $P(x, y)$  が楕円  $C$  上を動くとき、点  $Q(X, Y)$  は直線  $l: Y = pX + q$  上を動くとする。ただし  $p, q$  は実数とする。このとき  $a$  および  $p, q$  の値を求めよ。
- (3) (2)において、点  $P(x, y)$  が楕円  $C$  上を動くとき、点  $Q(X, Y)$  の  $X$  の最大値、最小値を求めよ。

**2** 次の問いに答えよ。

(1)  $k, n$  は不等式  $k \leq n$  を満たす自然数とする。このとき、

$$2^{k-1}n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) \leq n^k k!$$

が成り立つことを示せ。

(2) 自然数  $n$  に対して、 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$  が成り立つことを示せ。

(3)  $\frac{9}{19} < \log_{10} 3 < \frac{1}{2}$  が成り立つことを示せ。

3  $a$  を実数とし、 $xy$  平面上において、2つの放物線

$$C: y = x^2, D: x = y^2 + a$$

を考える。次の問いに答えよ。

- (1)  $p, q$  を実数として、直線  $l: y = px + q$  が  $C$  に接するとき、 $q$  を  $p$  で表せ。
- (2) (1)において、直線  $l$  がさらに  $D$  にも接するとき、 $a$  を  $p$  で表せ。
- (3)  $C$  と  $D$  の両方に接する直線の本数を、 $a$  の値によって場合分けして求めよ。

4 箱の中に1から9までの異なる整数が1つずつ書かれたカードが9枚入っている。「箱からカードを1枚引き、カードに書かれた整数を記録して箱の中に戻す」という操作を3回繰り返す。記録された3つの整数の最小値を $m$ 、最大値を $M$ とする。次の問いに答えよ。

- (1)  $5 < m$  となる確率および  $M < 5$  となる確率を求めよ。
- (2)  $m \leq 5 \leq M$  となる確率を求めよ。
- (3)  $k = 1, 2, \dots, 9$  に対して、 $m \leq k \leq M$  となる確率を  $p(k)$  とする。 $p(k)$  の最大値、最小値を求めよ。

5 次の問いに答えよ。

(1) 実数  $x \geq 0$  に対して、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$x - \frac{1}{2}x^2 \leq \log(1+x) \leq x$$

(2) 数列  $\{a_n\}$  を

$$a_n = n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} \log(1+x) dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定めるとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  を求めよ。

(3) 数列  $\{b_n\}$  を

$$b_n = \sum_{k=1}^n \log\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定めるとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  を求めよ。