

平成24年度入学試験問題(前期)

数 学

注 意

1. 合図があるまで表紙をあけないこと。
2. 問題右頁とその裏は計算に使用する。
3. 受験票は机上に出しておくこと。

数 学 (前 期)

[1] 実数列 a_1, a_2, a_3, \dots に対して, $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ とおくと,

$S_n = -n^3 + 6n^2 - 11n + 6 + (n-2)a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成り立つとする。

(1) $n \geq 2, n \neq 3$ のとき a_n を a_{n-1} を用いて表せ。

(2) $a_3 = 3$ として, すべての自然数 n について a_n を求めよ。

(3) $a_3 = 3, n \geq 3$ とするとき, $\sum_{k=3}^n \frac{1}{a_k}$ を求めよ。

[2] (1) $\log(x + \sqrt{x^2 + 1})$ の導関数を求めよ。

(2) $y = \sqrt{x^2 + 1}$ とおくと y は $y = x \frac{dy}{dx} + \frac{1}{y}$ をみたすことを示せ。

(3) 不定積分 $\int \sqrt{x^2 + 1} dx$ を求めよ。

(4) 双曲線 $y^2 - x^2 = 1$ と 2 直線 $x = -1, x = 1$ で囲まれる図形の面積を求めよ。

[3] 与えられた自然数 n に対して, $a^2 + b^2 + c^2 = n, a \geq b \geq c$ をみたす自然数の組 (a, b, c) を求める問題を考える。

(1) $n = 114$ のとき, 解 (a, b, c) が存在すれば, $7 \leq a \leq 10$ であることを示せ。

(2) n を 4 で割ったときの余りが 2 であるとき, 解 (a, b, c) が存在すれば, a, b, c のうち 1 つが偶数, 他の 2 つが奇数であることを示せ。

(3) $n = 114$ のとき, すべての解を求めよ。

[4] 空間に四面体 OABC がある。△OAB, △OBC, △OCA の垂心をそれぞれ P, Q, R とする。ここで三角形の垂心とは, 各頂点からそれぞれの対辺またはその延長に下ろした 3 本の垂線の交点である。次の記号を用いる。

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}, |\vec{a}| = a, |\vec{b}| = b, |\vec{c}| = c, \vec{a} \cdot \vec{b} = f, \vec{b} \cdot \vec{c} = g, \vec{c} \cdot \vec{a} = h$$

(1) 直線 OA 上の点 D が $\vec{a} \perp \overrightarrow{BD}$ をみたすとき, \overrightarrow{OD} を \vec{a}, a, f を用いて表せ。

(2) \overrightarrow{OP} を $\vec{a}, \vec{b}, a, b, f$ を用いて表せ。

(3) $a = b = c = 1$ かつ $f = g = h$ のとき, 3 直線 AQ, BR, CP は 1 点で交わることを示し, その交点を M とするとき, \overrightarrow{OM} を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ と f を用いて表せ。

[5] 数直線上で点を単位時刻ごとに移動させ, 時刻 n における点の位置を X_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) と表す。 $X_0 = 1$ として, 1 以上の n については,

$X_{n-1} = 1$ または 2 のとき, 硬貨を投げて表が出れば $X_n = X_{n-1} - 1$, 裏が出れば $X_n = X_{n-1} + 1$ とする。

$X_{n-1} = 0$ または 3 のとき, $X_n = X_{n-1}$ とする。

X_n が 0, 1, 2, 3 となる確率をそれぞれ p_n, q_n, r_n, s_n とする。特に $p_0 = r_0 = s_0 = 0, q_0 = 1$ である。

(1) p_2, q_2, r_2, s_2 を求めよ。

(2) $n \geq 2$ のとき, $p_{n-2}, q_{n-2}, r_{n-2}, s_{n-2}$ を用いて p_n, q_n, r_n, s_n を表せ。

(3) n が偶数のとき, n を用いて p_n, q_n, r_n, s_n を表せ。

計算に使用する

計算に使用する

数 学 (前 期)

(その1)

受験 番号		氏 名	
----------	--	--------	--

下の線より上には解答を記入しないこと

{ 1 }

数 学 (前 期)

(その2)

受験 番号		氏 名	
----------	--	--------	--

下の線より上には解答を記入しないこと

{ 2 }

数 学 (前 期)

(その3)

受験 番号		氏 名	
----------	--	--------	--

下の線より上には解答を記入しないこと

[3]

数 学 (前 期)

(その4)

受験 番号		氏 名	
----------	--	--------	--

下の線より上には解答を記入しないこと

[4]

数 学 (前 期)

(その5)

受験 番号		氏 名	
----------	--	--------	--

受 験 番 号

数 学
(前 期)

下の線より上には解答を記入しないこと

[5]

1	
2	
3	
4	
5	
計	