前期日程用

平成24年度

数　学　問　題

（理学部・工学部・医学部医学科）

注意事項

1　問題冊子は，監督者が「解答始め」の指示をするまで開かないこと．

2　問題冊子は全部で 2 ページである．脱落のあった場合には申し出ること．

3　解答用紙は全部で 4 枚である．各ページ所定欄に，それぞれ氏名，受験学部，受験番号（最後のページは，左右 2 か所）を忘れずに記入すること．

4　解答は，すべて解答用紙の所定欄に記入すること．

5　解答用紙の裏面を計算に使ってもよい．

6　机上に各自の「受験票」と「大学入試センター試験受験票」を出しておくこと．

7　問題冊子は持ち帰ること．

第　1　問（５０点）

t を正の定数とする．次の問いに答えよ．

問１　正の実数 x に対して定義された関数 $g(x) = e^x x^{-t}$ について，$g(x)$ の最小値を t を用いて表せ．

問２　すべての正の実数 x に対して $e^x > x^t$ が成り立つための必要十分条件は，$t < e$ であることを示せ．

第　2　問（５０点）

三角形ABCの頂点A, B, Cは反時計回りに並んでいるものとする．点Pはいずれかの頂点の位置にあり，１枚の硬貨を１回投げるごとに，表が出れば時計回りに隣の頂点へ，裏が出れば反時計回りに隣の頂点へ，移動するものとする．点Pは最初，頂点Aの位置にあったとする．硬貨を n 回投げたとき，点Pが頂点Aの位置に戻る確率を a_n で表す．次の問いに答えよ．

問１　$n \geqq 2$ に対し a_n を a_{n-1} を用いて表せ．

問２　a_n を求めよ．

第 3 問（50点）

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲で二つの曲線 $y = \sin x$ と $y = k\cos x$ を考える．ただし，$k > 0$ とする．この二つの曲線の交点の x 座標を α, β $(0 \leqq \alpha < \beta \leqq 2\pi)$ とし，$\alpha \leqq x \leqq \beta$ の範囲でこの二つの曲線に囲まれた図形の面積を S とする．次の問いに答えよ．

問 1　k と β を α を用いて表せ．

問 2　S を k を用いて表せ．

問 3　$S = 4$ のとき，$\alpha \leqq x \leqq \theta$ の範囲でこの二つの曲線に囲まれた図形の面積が 2 となるような θ の値を求めよ．

第 4 問（50点）

$|a^2 - 2b^2| = 1$ をみたす整数 a, b によって，$\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$ と表される 2 次の正方行列全体の集合を U とする．このとき，U に属する行列 $A = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$ に対して，$f(A) = a + \sqrt{2}b$ とおく．次の問いに答えよ．

問 1　二つの行列 A と B が U に属するならば，積 AB も U に属することを示し，さらに $f(AB) = f(A)f(B)$ が成り立つことを示せ．

問 2　U に属する行列 $A = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$ について，$f(A) \geqq 1$ ならば，$-1 \leqq a - \sqrt{2}b \leqq 1$ が成り立つことを示せ．

問 3　U に属する行列 A について，$1 \leqq f(A) < 1 + \sqrt{2}$ ならば，$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であることを示せ．

問 4　U に属する行列 A について，$1 + \sqrt{2} \leqq f(A) < (1 + \sqrt{2})^2$ ならば，$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ であることを示せ．