

平成 24 年度入学試験問題

数 学

注 意 事 項

1. この問題冊子は試験開始の合図があるまで開いてはいけない。
2. 解答用紙は問題冊子とは別になっているので、解答はすべて解答用紙の指定されたところに記入すること。また、解答用紙は問題ごとに別になっているので、注意すること。
3. 受験番号を解答用紙の指定されたところへ必ず記入すること。決して氏名を書いてはいけない。
4. この問題冊子は持ち帰ること。

解答にあたっての注意事項

この問題冊子には、経済学部、理学部、医学部の問題がある。受験者は下の表にしたがって、志望学部学科の問題を解答すること。

学部	学科	解答する問題
経済学部	経済学科 経済システム法学科	①, ②, ③, ④ の 4 問
理学部	数理・自然情報科学科	②, ③, ④, ⑤, ⑥, ⑦ の 6 問
医学部	医学科	②, ③, ④, ⑤, ⑥ の 5 問
	保健学科	①, ②, ③, ④ の 4 問

**1**

次の問いに答えよ。

(1)  $n$  を自然数とするとき、 $4^{2n-1} + 3^{n+1}$  は 13 の倍数であることを示せ。

(2)  $\frac{1}{5 - \sqrt{19}}$  の整数部分を  $\alpha$ 、小数部分を  $\beta$  とするとき  $\alpha, \beta$  を求めよ。また  $\alpha^2 - 18\beta^2$  を求めよ。



**2**

次の3条件をすべてみたす  $xy$  平面上の円  $C$  が存在するような実数  $t$  を求めよ。

(i) 円  $C$  の半径は3である。

(ii) 円  $C$  は  $x$  軸に接する。

(iii) 点  $P(t, t^2)$  は円  $C$  上にあり、点  $P$  における円  $C$  の接線の方程式は  $y = 2tx - t^2$  である。



**3** さいころを 1000 回投げるとき, 1 の目がちょうど  $k$  回出る確率を  $P_k$  とおく。  $P_k$  が最大となる  $k$  を求めよ。



4

実数  $a$  は  $a > -1$  とする。関数  $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 5x - 1$  に対し、

$$-1 < c < a, \quad \frac{f(a) - f(-1)}{a + 1} = f'(c)$$

となる  $c$  がちょうど 2 つ存在するような  $a$  の値の範囲を求めよ。





5 行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  は次の条件 (i), (ii) をみたすものとする。

(i)  $a + d = 1$

(ii)  $A^2 - A - 2E = O$

ただし、 $E$  は単位行列で、 $O$  は零行列である。

このとき、次の問いに答えよ。

(1) 次の関係式をみたす実数  $x, y$  は  $x = y = 0$  に限ることを示せ。

$$xA + yE = O$$

(2) 自然数  $n$  に対し、 $A^n$  はある実数  $x_n, y_n$  を用いて、 $A^n = x_n A + y_n E$  の形で表せることを示し、数列  $\{x_n - y_n\}, \{2x_n + y_n\}$  の一般項を求めよ。

(3) 自然数  $n$  に対し、 $A^n = \begin{pmatrix} p_n & q_n \\ r_n & s_n \end{pmatrix}$  とおく。 $p_n + s_n$  を求めよ。



**6**

次の問いに答えよ。

(1)  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  に対し,

$$x < \tan x$$

となることを示せ。

(2)  $x > 0$  に対し,

$$\log(x + \sqrt{1+x^2}) > \sin x$$

となることを示せ。ただし、対数は自然対数である。



**7** $-\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$  で定義される 2 つの関数

$$f(x) = \sqrt{|x|} + \sqrt{5 - x^2}$$

$$g(x) = \sqrt{|x|} - \sqrt{5 - x^2}$$

に対し、次の問いに答えよ。

- (1) 関数  $f(x)$  と  $g(x)$  の増減を調べ、 $y = f(x)$  と  $y = g(x)$  のグラフの概形をかけ。
- (2) 2 つの曲線  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  で囲まれた図形の面積を求めよ。