

数 学

注意事項

1. 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
2. 試験開始の指示があったら、すぐに「問題」と「答案用紙」および「計算用紙」の種類と枚数が以下のとおりであることを確認し、受験番号を「答案用紙」の7枚すべてに記入して下さい。
 - 問題 1枚
 - 答案用紙 (数学その1) ~ (数学その7) 各1枚 計7枚
 - 計算用紙 (その1) ~ (その4) 各1枚 計4枚

(この「注意事項」は「計算用紙(その4)」のうら面に印刷されています。)
3. 「問題」1枚と「答案用紙」7枚および「計算用紙」4枚の種類や枚数が異なる場合や印刷が不鮮明な場合は、手を挙げて監督者に知らせて下さい。
4. 解答は各答案用紙の指定された場所を書いて下さい。(数学その1)ではおもて面に解答し、(数学その1)以外では、うら面を使用する場合はその旨を記して下さい。
5. 「問題」1枚および「計算用紙」4枚は草案として使用してもかまいませんが、採点対象とはしません。必ず持ち帰って下さい。
6. 試験終了後、「答案用紙」7枚はすべて回収します。上から(数学その1)、(数学その2)、…、(数学その7)の順に、おもて面を上にして、ひろげた状態で用紙の上下を揃えて7枚重ねて下さい。
7. すべての確認作業が終了するまで着席して下さい。

平成24年度入学者選抜試験問題 (数学)

1 次の問題文の空欄 から にあてはまる数または式を解答欄に記入せよ。

- (1) 実数 x に関する2つの条件 $p: 4x^2 - 12x + 5 \geq 0$, $q: x^2 - 3ax \leq 0$ を考える。 p が q の必要条件にならないような定数 a の値の範囲は である。
- (2) 平面上で点 $(1, 1)$ および直線 $y = -x - 2$ から等距離にある点の軌跡の方程式を $x^2 + axy + by^2 + cx + dy + e = 0$ (ただし, a, b, c, d, e は実数) と書いたとき, $d =$ であり, $a + b + c + d + e =$ である。
- (3) 初項 $a_1 = 1$, 漸化式 $a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 3}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項は, $a_n =$ である。
- (4) 自然数 n に対して, $S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\log k - \log n}{k}$ とするとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n =$ である。
- (5) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{15\pi}{4}} \{\sin x \cos^2 x + 2 \sin^3 x + 3 \sin^2 x \cos^2 x + 4 \sin^5 x \cos^2 x + 5(x - 2\pi) \sin^2 x\} dx =$ である。

2 $f(x) = (x - 2)^2$ とする。1, 2, 3, 4 の数字が1つずつ書かれた4枚のカードがある。無作為に1枚選んで、書かれた数を記録し、カードを戻す操作を1000回くり返す。1000以下の自然数 n に対して、 n 回目に記録された数を d_n とする。 $x_1 = d_1$, $y_1 = f(x_1)$ とし、 y_1 の期待値を e_1 とする。2以上1000以下の自然数 n に対して、

$$x_n = \begin{cases} x_{n-1} + \frac{1}{2^{n-1}} d_n & (f'(x_{n-1}) < 0 \text{ のとき}) \\ x_{n-1} & (f'(x_{n-1}) = 0 \text{ のとき}) \\ x_{n-1} - \frac{1}{2^{n-1}} d_n & (f'(x_{n-1}) > 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

および $y_n = f(x_n)$ とし、 y_n の期待値を e_n とする。

- (1) $x_{1000} > 10$ となる確率が0になることを示せ。
- (2) e_1, e_2 を求めよ。
- (3) $1 \leq n < 1000$ となる自然数 n に対して、 $e_n \geq e_{n+1}$ が成り立つことを示せ。

3 $f(m, n) = m^2 - mn + n^2$ とおく。自然数 k に対して、平面上の点 (m, n) の集合 $X(k) = \{(m, n) \mid m, n \text{ は整数}, f(m, n) = k\}$ を考える。

- (1) $X(k)$ は有限集合であることを示せ。また、 $X(1)$ の要素をすべて求めよ。
- (2) $k = 2, 4$ に対して、 $X(k)$ の要素の個数をそれぞれ求めよ。
- (3) 自然数 r に対して、 $X(2^r)$ の要素の個数を求めよ。

4 次の各問いに答えよ。

- (1) 微分可能な関数 $f(x)$ で、次の条件 (i), (ii) をともに満たす例を1つあげよ。
- (i) すべての実数 x に対して、 $f(x) > 0$ かつ $f'(x) > 0$ が成り立つ。
- (ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = \infty$ かつ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = \infty$ が成り立つ。
- (2) 関数 $f(x), g(x)$ は、すべての実数 x に対して $f(x) > 0$ かつ $g(x) > 0$ を満たし、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ かつ $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ が成り立つと仮定する。このとき、次の条件 (i), (ii) をともに満たす関数 $h(x)$ の例を $f(x), g(x)$ を用いて1つ作れ。
- (i) すべての実数 x に対して、 $h(x) > 0$ が成り立つ。
- (ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{h(x)} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x)}{g(x)} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{h(x)\}^4}{\{f(x)\}^3} = \infty$ が成り立つ。

山梨大学平成24年度入学者選抜試験答案用紙（数学その1）

1の解答を必ず解答欄内を書いて下さい。

(1) ア	
-------	--

(2) イ		ウ	
-------	--	---	--

(3) エ	
-------	--

(4) オ	
-------	--

(5) カ	
-------	--

受験番号

小計

平成24年度入学者選抜試験答案用紙（数学その2）

2の解答を書いて下さい。

受験番号

小計

平成24年度入学者選抜試験答案用紙（数学その3）

2 の解答のつづきを書いて下さい。

受 験 番 号

平成24年度入学者選抜試験答案用紙（数学その4）

3 の解答を書いて下さい。

受 験 番 号

小 計

平成24年度入学者選抜試験答案用紙（数学その5）

3 の解答のつづきを書いて下さい。

受 験 番 号

平成24年度入学者選抜試験答案用紙（数学その6）

4の解答を書いて下さい。

受験番号

小計

平成24年度入学者選抜試験答案用紙（数学その7）

4 の解答のつづきを書いて下さい。

受 験 番 号