

平成 25 年度一般入試前期日程

数 学 問 題 紙

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題紙を開いてはいけません。
2. 数学の問題紙は、2 ページあります。
3. 解答用紙は 4 枚、草案紙は 1 枚あります。
4. 受験番号は、監督者の指示に従って、全ての解答用紙の指定された箇所に必ず記入しなさい。
5. 受験番号および解答以外のことを解答用紙に書いてはいけません。
6. 解答はすべて解答用紙の指定された欄に書くこと。裏面に書かないこと。
7. 解答用紙のみを提出しなさい。問題紙、草案紙は持ち帰りなさい。

問題 1 x, y, z, p は自然数で

$$xy + yz + zx = pxyz, \quad x \leq y \leq z \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

を満たしている。次の問いに答えよ。

問 1 $p \leq 3$ を示せ。

問 2 ①を満たす自然数の組 (p, x, y, z) をすべて求めよ。

問題 2 a を正の実数とする。双曲線 $C: x^2 - a^2 y^2 + a^2 = 0$ 上の 4 点 $A_1(0, 1)$, $A_2(0, -1)$, $A_3(a, \sqrt{2})$, $A_4(-2a, -\sqrt{5})$ が与えられている。 A_1 における C の接線を l_1 , A_3 における C の接線を l_3 とする。次の問いに答えよ。

問 1 l_1 と l_3 の交点 S の座標を求めよ。

問 2 直線 A_1A_2 と直線 A_3A_4 の交点 U の座標, および直線 A_1A_4 と直線 A_2A_3 の交点 V の座標を求めよ。

問 3 3 点 S, U, V が同一直線上にあることを示せ。

問題 3 a を正の実数とし, $f(x) = e^{-x} \sin ax$ とおくと, 次の問いに答えよ.

問 1 n を自然数とする. 曲線 $y = f(x)$ $\left(\frac{2(n-1)\pi}{a} \leq x \leq \frac{2n\pi}{a} \right)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を A_n で表すとき, A_n を a と n を用いて表せ.

問 2 $S = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ を a を用いて表せ.

問 3 $\lim_{a \rightarrow \infty} S$ を求めよ.

問題 4 次の問いに答えよ.

問 1 関数 $y = x \log x - x$ ($x > 0$) の増減を調べ, そのグラフをかけ.

問 2 a を正の実数とする. 曲線 $C: y = \log(x+1)$ 上の点 $(t, \log(t+1))$ における接線 l_t が, 曲線 $C_a: y = a \log x$ 上の点 $(s, a \log s)$ における接線にもなっているとき, t と s の関係を a を含まない式で表せ.

問 3 任意に与えられた $t > -1$ に対して, 直線 l_t が曲線 C_a の接線にもなっているような a が唯一つ存在すること, および $a > 1$ であることを示せ.

問 4 直線 l_t が曲線 C_a の接線になっているとき, その接点の x 座標を $s(t)$ とかくことにする. $s(t)$ を t の関数とみて増減を調べ, さらに $\lim_{t \rightarrow \infty} (s(t) - t)$ を求めよ.