C — 1

平成25年度入学者選抜学力検査問題

数　　　学

注　意　事　項

1. この冊子は，監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 「問題の選択に関する注意」は裏表紙に記載してあるので，この冊子を裏返して必ず読み，志望学部・学科等により解答すべき問題の番号を確認すること。ただし，この冊子を開いてはいけません。
3. 監督者から指示があったら，解答用紙の上部の所定欄には受験番号，座席番号を，また，下部の所定欄には座席番号をそれぞれ必ず記入すること。
4. 解答は，問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定以外の解答用紙に書かれた解答は0点となることがあります。
5. 解答は，解答用紙の裏面に書かないこと。
6. 各問題とも，特に指示がないかぎり，必ず解答の過程を書き，結論を明示すること。小問に分けられているときには，小問の結論を明示すること。
7. この冊子は 10 頁です。落丁／乱丁または印刷の不備なものがあれば申し出ること。
8. 下書き等は，この冊子の余白の部分を使用すること。
9. 退室の際には，解答用紙は記入の有無にかかわらず机上に置いておくこと。持ち帰ってはいけません。
10. この冊子は持ち帰ってかまいません。

1 a, b を正の整数とする。このとき，関数

$$y = \left| x^2 - ax + \frac{a^2}{2} - 5 \right|$$

のグラフと直線 $y = b$ との共有点を考える。

(1) 共有点が 3 個になるような (a, b) の組をすべて求めよ。

(2) 共有点が 1 個になるような (a, b) の組のうち，b が最小になるものを求めよ。

2 a, b を 100 以下の正の整数とする。2 つの分数 $\dfrac{a}{27}$, $\dfrac{31}{b}$ がどちらも既約分数であり，かつ，和 $\dfrac{a}{27}+\dfrac{31}{b}$ が整数であるとする。このような (a, b) の組をすべて求めよ。

$\boxed{3}$ 1辺の長さが 3 の正四面体 OABC において, 辺 BC を 1 : 2 に内分する点を D とする。また, 辺 OC 上に点 E をとり, CE $= t$ とする。

(1) AD の長さを求めよ。

(2) $\cos\angle$DAE を t を用いて表せ。

(3) $\triangle$ADE の面積が最小になるときの t の値とそのときの面積を求めよ。

4 1から9までの番号をつけた9枚のカードがある。これらを無作為に1列に並べる試行を行う。

(1) 下記の条件 (A) が成り立つ確率を求めよ。

(2) 下記の条件 (B) が成り立つ確率を求めよ。

(3) 条件 (A), (B) が同時に成り立つ確率を求めよ。

ただし, 条件 (A), (B) は次のとおりである。

(A) 番号1のカードと番号2のカードは隣り合わない。

(B) 番号8のカードと番号9のカードの間には, ちょうど1枚のカードがある。

$\boxed{5}$ a, b を実数とし，$a > 0$ とする。放物線 $y = \dfrac{x^2}{4}$ 上に2点 $\mathrm{A}\left(a, \dfrac{a^2}{4}\right)$，$\mathrm{B}\left(b, \dfrac{b^2}{4}\right)$ をとる。点 A における放物線の接線と法線をそれぞれ ℓ_A と n_A，点 B における放物線の接線と法線をそれぞれ ℓ_B と n_B とおいたとき，ℓ_A と ℓ_B が直交しているものとする。2つの接線 ℓ_A, ℓ_B の交点を P とし，2つの法線 n_A, n_B の交点を Q とする。

(1) b を a を用いて表せ。

(2) P, Q の座標を a を用いて表せ。

(3) 長方形 AQBP の面積が最小となるような a の値と，そのときの面積を求めよ。

$\boxed{6}$ 整数 p, q $(p \geqq q \geqq 0)$ に対して 2 項係数を ${}_pC_q = \dfrac{p!}{q!(p-q)!}$ と定める。なお $0! = 1$ とする。

(1) n, k が 0 以上の整数のとき,

$$ {}_{n+k+1}C_{k+1} \times \left(\frac{1}{{}_{n+k}C_k} - \frac{1}{{}_{n+k+1}C_k} \right) $$

を計算し, n によらない値になることを示せ。

(2) m が 3 以上の整数のとき, 和 $\dfrac{1}{{}_3C_3} + \dfrac{1}{{}_4C_3} + \dfrac{1}{{}_5C_3} + \cdots + \dfrac{1}{{}_mC_3}$ を求めよ。

$\boxed{7}$ a は 0 でない実数とする。直線 $y = ax$ と曲線 $y = x\log(x+1)$ で囲まれる図形の面積を求めよ。

$\boxed{\mathbf{8}}$ r を 1 より大きい実数とする。半径 1 の円 C の周上に点 Q をとる。最初に円 C の中心 P は座標平面の $(0,1)$, 点 Q は $(0,2)$ にあるものとし, 円 C が x 軸に接しながら x 軸の正の方向にすべることなく転がっていく。角 θ ラジアンだけ回転したとき, 半直線 PQ 上に $\mathrm{PR}=r$ となる点 R をとる。θ を 0 から 2π まで動かしたときの R の軌跡を考える。

(1) α, β は $0 \leqq \alpha < \beta \leqq 2\pi$ をみたし, $\theta=\alpha$ のときの R の座標と $\theta=\beta$ のときの R の座標とが一致するものとする。$t=\dfrac{\beta-\alpha}{2}$ とおくとき, r を t を用いて表せ。

(2) (1) において, θ を α から β まで動かしたときの R の軌跡によって囲まれた図形の面積を S とする。S を t を用いて表せ。

(3) $\displaystyle\lim_{r\to\infty}\frac{S}{r^2}$ を求めよ。

$\boxed{\mathbf{9}}$ m^4+14m^2 が $2m+1$ の整数倍となるような整数 m をすべて求めよ。

10 $\tan 10^\circ = \tan 20^\circ \cdot \tan 30^\circ \cdot \tan 40^\circ$ を示せ。

問題の選択に関する注意

志望学部・学科等により，以下に示す番号の問題に解答すること。

科目	学部・学科等		解答する問題番号
数学I 数学A	教育学部	算数科選修, 技術科教育分野	1 2 3 4
数学I 数学II 数学A 数学B	文学部 教育学部 法経学部 園芸学部 先進科学プログラム	行動科学科 情報教育分野 物理化学・生命化学分野, 人間科学関連分野	3 4 5 6
	教育学部	数学科教育分野	1 2 3 4 5 6
数学I 数学II 数学III 数学A 数学B 数学C	理学部 薬学部 工学部 先進科学プログラム	物理学科，化学科, 生物学科，地球科学科 物理学分野, 電気電子工学分野, ナノサイエンス分野, 画像科学分野, 情報画像分野	3 4 5 6 7
	医学部		4 5 6 8 9
	理学部	数学・情報数理学科	4 5 6 7 8 10