平 成 25 年 度

数 学

注意事項

1. 問題は **3 題**で，すべて必答問題です．
2. 解答はすべて別紙（解答用紙 3 枚）の該当する欄に記入しなさい．
3. 解答用紙の裏面を使用する場合は，表面の右下に「**裏面に続く**」と記入し，表面の下の部分を持って上にめくり記入しなさい．表面とは書く方向が反対になります．
4. **図**や**グラフ**は解答の中で重要な位置をしめます．その特徴をおさえて，ていねいに描きなさい．
5. 解答者がたどる道筋や問題解決に至る要点を明確に意識して，**論述式**の答案を読みやすく書きなさい．
6. 問題用紙の余白は，下書きや**ミスがないかどうか見直す**のに十分活用しなさい．

$\boxed{1}$ (必答問題) (配点 70 点)

関数 $f(x) = \log x + \dfrac{1}{x}$ と曲線 $C : y = f(x)\ (x > 0)$ について，以下の問いに答えよ．なお，必要ならば $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ を用いてもよい．

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ と不定積分 $\displaystyle\int f(x)\,dx$ をそれぞれ求めよ．

(2) 曲線 C の変曲点を求めよ．

以下 a は 1 より大きい実数とし，点 $(a,\ f(a))$ における C の接線を $l(a)$ とする．

(3) 接線 $l(a)$ の方程式を求めよ．また，$a \neq 2$ のとき，曲線 C と接線 $l(a)$ は 2 個の共有点(接点と交点)をもつことを示せ．

(4) $a = 2$ とする．曲線 C，接線 $l(2)$ と 2 直線 $x = 1$，$x = 4$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

$\boxed{2}$ (必答問題) (配点 65 点)

$|k| < 1$ または $k > 1$ を満たす実数 k に対し，次の 2 次曲線 $C(k)$ を考える.

$$C(k) : \frac{x^2}{k+1} + \frac{y^2}{k-1} = 1$$

以下の問いに答えよ.

(1) 点 $(1,\ 1)$ を通る曲線 $C(k)$ をすべて求めて，その概形をかけ.

(2) 曲線 $C(3)$ が点 $(a,\ b)$ $(a > 0,\ b > 0)$ を通るとき，a と b の間に成り立つ関係式を求めよ．またこのとき，点 $(a,\ b)$ を通る曲線 $C(k)$ $(k \neq 3)$ の方程式を，b を用いて表し，その焦点を求めよ.

(3) (2)の 2 つの曲線 $C(3)$，$C(k)$ について，点 $(a,\ b)$ における $C(3)$，$C(k)$ の接線をそれぞれ l_1，l_2 とする．l_1 と l_2 のなす角度を求めよ.

$\boxed{3}$ (必答問題) (配点 65 点)

さいころを4回投げて，k 回目 ($k=1,\ 2,\ 3,\ 4$) に出る目の数を X_k とする．1から6までの目は等確率で出るものとするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $j,\ k\ (j<k)$ は数の集合 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ を動くものとする．$X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4$ の中で，$X_j=X_k$ となる組 $\{j,\ k\}$ が少なくとも1つ存在する事象を A，$X_j=X_k$ となる組 $\{j,\ k\}$ がただ1つ存在する事象を B，同じ目がちょうど3つ出る事象を C とする．確率 $P(A)$，$P(B)$，$P(C)$ をそれぞれ求めよ．

(2) A が起こったときの和事象 $B\cup C$ の条件つき確率 $P_A(B\cup C)$ を求めよ．

(3) $X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4$ の値を小さい順に並べ替えて，$X_{(1)}\leqq X_{(2)}\leqq X_{(3)}\leqq X_{(4)}$ を定める．例えば，$X_1=3$，$X_2=2$，$X_3=6$，$X_4=2$ の場合，$X_{(1)}=2$，$X_{(2)}=2$，$X_{(3)}=3$，$X_{(4)}=6$ である．確率 $P(X_{(1)}=4)$ と $P(X_{(1)}=X_{(2)}=4)$ をそれぞれ求めよ．