下　書　用　紙　（切り取ってはいけない）

1 以下の各問いに答えよ。

(1) 実数α，βが$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$，$0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$，$\tan\alpha\tan\beta = 1$を満たすとき，$\alpha + \beta$の値を求めよ。

(2) 実数α，β，γが$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$，$0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$，$0 < \gamma < \dfrac{\pi}{2}$，$\alpha + \beta + \gamma = \dfrac{\pi}{2}$を満たすとき，

$$\tan\alpha\tan\beta + \tan\beta\tan\gamma + \tan\gamma\tan\alpha$$

の値は一定であることを示せ。

(3) 実数α，β，γが$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$，$0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$，$0 < \gamma < \dfrac{\pi}{2}$，$\alpha + \beta + \gamma = \dfrac{\pi}{2}$を満たすとき，

$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma$$

のとりうる値の範囲を求めよ。

2 2次正方行列$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$のうち，次の3条件(i),(ii),(iii)を満たすもの全体の集合をMとする。

(i) a，b，c，dはすべて整数

(ii) $b + c = 0$

(iii) $a - b - d = 0$

またEを2次単位行列とする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) 行列A，BがともにMの要素であるとき，それらの積ABもMの要素であることを示せ。

(2) 行列$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$とその逆行列$A^{-1}$がともに$M$の要素であるとき，

$ad - bc = 1$が成立することを示せ。

(3) 行列Aとその逆行列A^{-1}がともにMの要素であるようなAをすべて求めよ。

(4) 自然数nについて，Mの要素であって$A^n = E$を満たすような行列Aの全体の集合をS_nとする。S_nの要素の個数がちょうど3となるnをすべて求めよ。

3 m，n を自然数として，関数 $f(x) = x^m(1-x)^n$ を考える。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の最大値を m，n を用いて表せ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ を m，n を用いて表せ。

(3) a，b，c を実数として，関数 $g(x) = ax^2 + bx + c$ の $0 \leqq x \leqq 1$ における最大値を $M(a,b,c)$ とする。次の2条件(i)，(ii)が成立するとき，$M(a,b,c)$ の最小値を m，n を用いて表せ。

(i) $g(0) = g(1) = 0$

(ii) $0 < x < 1$ のとき $f(x) \leqq g(x)$

(4) m，n が2以上の自然数で $m > n$ であるとき

$$\frac{(m+n+1)!}{m!\,n!} > \frac{(m+n)^{m+n}}{m^m n^n} > 2^{2n-1}$$

が成立することを示せ。

下　書　用　紙　（切り取ってはいけない）

下　書　用　紙　（切り取ってはいけない）

下　書　用　紙　（切り取ってはいけない）

下　書　用　紙　（切り取ってはいけない）