数　　学

1. 監督者の指示があるまで開いてはいけない。
2. 解答は別紙の解答用紙に記入しなさい。
3. 問題用紙は各科目の試験終了後持ち帰ってもよい。
   ただし，試験途中では持ち出してはいけない。

1. 次の $\boxed{}$ にあてはまる適切な数値を解答欄に記入せよ。

(1) 数直線上を動く点Pが原点の位置にある。2個のさいころを同時に投げる試行をTとし，試行Tの結果によって，Pは次の規則で動く。

(規則) 2個のさいころの出た目の積が偶数ならば $+2$ だけ移動し，奇数ならば $+1$ だけ移動する。

試行Tを n 回繰り返し行ったときのPの座標を x_n とすると，$x_1 = 2$ となる確率は $\boxed{(ア)}$ であり，$x_3 = 3$ かつ $x_4 = 5$ となる確率は $\boxed{(イ)}$ である。また，Pが座標4以上の点に初めて到達するまで試行Tを繰り返し行うとき，試行回数の期待値は $\boxed{(ウ)}$ である。

(2) 平面上に3点O，A，Bがあり，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = \left|2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = 1$ をみたしている。このとき，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = \boxed{(エ)}$ である。また，実数 s，t が条件 $1 \leqq s+3t \leqq 3$，$s \geqq 0$，$t \geqq 0$ をみたしながら動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で定められた点Pの存在する範囲の面積は $\boxed{(オ)}$ である。

2. xy 平面上に 2 曲線

$$C_1 : y = 2x\sqrt{1-x^2}, \quad C_2 : y = \sqrt{1-x^2}$$

がある。C_1，C_2 上に 2 点 $\mathrm{P}_1(t,\ 2t\sqrt{1-t^2})$，$\mathrm{P}_2(t,\ \sqrt{1-t^2})$ $(-1 < t < 1)$ をとり，P_1 における C_1 の接線 ℓ_t と，P_2 における C_2 の接線 m_t について考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1) C_1 および C_2 の概形を同じ xy 平面上に描け（xy 平面は解答用紙にある）。ただし，曲線の凹凸と変曲点は調べなくてよい。また，P_1 と P_2 が一致するときの t の値を求めよ。

(2) 2 直線 ℓ_t と m_t が平行になるときの t がみたすべき条件を，t についての 2 次方程式で表し，その解 α，β $(\alpha < \beta)$ を求めよ。

(3) ℓ_t と m_t が交点をもつとき，その交点の y 座標を y_t とする。

　(i) y_t を t を用いて表せ。

　(ii) $y_t > 0$ となる t の値の範囲を (2) で求めた α，β を用いて表し，この範囲における y_t の最小値を求めよ。

3. θ は $0 \leqq \theta \leqq \pi$ をみたす実数とする。xyz 空間内の平面 $z = 0$ 上に 2 点 $\mathrm{P}_\theta(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$，$\mathrm{Q}_\theta(2\cos\theta,\ 2\sin\theta,\ 0)$ をとり，θ を $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で動かすとき，線分 $\mathrm{P}_\theta\mathrm{Q}_\theta$ が通過する部分を D とする。空間内の $z \geqq 0$ の部分において，底面が D，$\mathrm{P}_\theta\mathrm{Q}_\theta$ 上の各点での高さが $\dfrac{2}{\pi}\theta$ の立体 K を考える。半球 $B : x^2 + y^2 + z^2 \leqq 2^2$，$z \geqq 0$ と K の共通部分を L とするとき，次の問いに答えよ。

(1) B を平面 $z = t$ $(0 \leqq t < 2)$ で切った切り口の円の半径を t を用いて表せ。

(2) L の体積を求めよ。

4. a, d は $ad \neq 0$ をみたす実数とする。O を原点とする座標平面上において，行列 $A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ の表す1次変換（移動）を f とし，以下の2つの条件をみたす直線 ℓ がただ1つ存在するときを考える。

(i) ℓ は O を通る

(ii) f によって，ℓ 上の点はすべて ℓ と垂直に交わるある直線 m 上に移される

このとき，次の問いに答えよ。

(1) a と d の関係式を求めよ。

(2) $d > 0$ とする。ℓ 上に O からの距離が1で x 座標が正となる点 P をとり，P の f による像を Q とする。線分 OQ の長さを求めよ。また，直線 PQ と y 軸が交わる点を R とするとき，線分 OR の長さが最小となるように a と d の値を定めよ。