2013 年 度 入 学 試 験 問 題

数　　学（問　題）

注　意

1)　数学の問題冊子は４ページあり，問題はⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの４題である。

2)　別に解答用紙１枚があり，**解答はすべてこの解答用紙の指定欄に記入すること。**
指定欄以外への記入はすべて無効である。
計算や下書きは問題用紙の白紙・空白部分を利用して行うこと。

3)　**解答用紙の所定欄に受験番号を記入せよ。氏名を記入してはならない。**
解答用紙の※印の欄には何も記入してはならない。

4)　問題冊子，解答用紙はともに持ち出してはならない。

5)　途中退場または試験終了時には，解答が他の受験生の目に触れないよう，解答用紙の上に問題冊子を重ねて，監督者の許可を得た後に退出すること。

I　(1)〜(6) の $\boxed{}$ の中に，あてはまる数，角度，整式，不等式，記号，語句などを記入せよ。

(1) $\alpha,\ \beta$ が $\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=1$ を満たすとき，$\alpha^3+\beta^3=$ $\boxed{\text{ア}}$ ，
$\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=$ $\boxed{\text{イ}}$ ，$|\,\alpha-\beta\,|=$ $\boxed{\text{ウ}}$ である。ただし，記号 $|\,a\,|$ は実数 a の絶対値を表す。

(2) 次の式を因数分解せよ。

(i) $9x^2-30xy-24y^2=$ $\boxed{\text{エ}}$　(ii) $(x+y)^3-(x-y)^3=$ $\boxed{\text{オ}}$

(3) 方程式 $8^x-2^{2x+1}-2^x+2=0$ のすべての解を $\boxed{\text{カ}}$ に記せ。

(4) $x+2y=4,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0$ とする。このとき関数 $\log_{\frac{1}{2}}(6xy+4y^2+1)$ は，$x=$ $\boxed{\text{キ}}$ において最大値 $\boxed{\text{ク}}$ をとり，$x=$ $\boxed{\text{ケ}}$ において最小値 $\boxed{\text{コ}}$ をとる。

(5) 座標平面において，動点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が 2 点 $\mathrm{A}(0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 3)$ からの距離の比を $2:1$ に保ちながら動くときの軌跡を C とする $(\mathrm{PA}:\mathrm{PB}=2:1)$。曲線 C の方程式は $\boxed{\text{サ}}$ である。また，第 1 象限において、直線 $y=mx$ と曲線 C とが接するとき，$m=$ $\boxed{\text{シ}}$ となる。

(6) 白玉 4 個，赤玉 4 個，青玉 4 個の計 12 個の玉が入っている袋から，よくかき混ぜて，同時に 3 個の玉を取り出す。このとき，

(i) 取り出した 3 個がすべて同じ色である確率は $\boxed{\text{ス}}$ である。

(ii) 取り出した 3 個のうち 2 個が同じ色で，他の 1 個が異なる色である確率は $\boxed{\text{セ}}$ である。

II　$0 \leqq \theta \leqq \pi$ とし，行列 $A = \begin{pmatrix} 2\cos\theta & \sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta \\ -\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta & -\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta \end{pmatrix}$ を考える。以下，A^{-1} は A の逆行列を表すものとし，$n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$ とする。

(1) A^{-1} を $\boxed{\text{ソ}}$ に記入せよ。

(2) $(A + A^{-1})^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ とおく。d_n を $\boxed{\text{タ}}$ に記入せよ。

(3) 無限級数 $d_1 + d_2 + d_3 + \cdots\cdots + d_n + \cdots\cdots$ が収束するような θ の値の範囲を $\boxed{\text{チ}}$ に記入し，そのときの無限級数の和を $\boxed{\text{ツ}}$ に記入せよ。

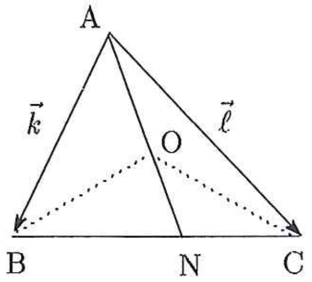
III　$x > 0$ で定義された関数 $g(x) = \dfrac{1}{x^2} \cdot \log x$ を考える。ただし，対数は自然対数とする。

(1) $g(x)$ は $x = x_A$ において極大値をとる。x_A の値を $\boxed{\text{テ}}$ に記入し，$g(x)$ の極大値を $\boxed{\text{ト}}$ に記入せよ。

(2) 座標平面上の曲線 $y = g(x)$ は1つの変曲点 $(x_B,\ g(x_B))$ をもつ。x_B の値を $\boxed{\text{ナ}}$ に記入せよ。

(3) 定積分 $\displaystyle\int_{x_A}^{x_B} g(x)\,dx$ の値を $\boxed{\text{ニ}}$ に記入せよ。

IV　△ABC において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{k}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{\ell}$ とする。ベクトルの大きさについて，$|\vec{k}| = 2$, $|\vec{\ell}| = \sqrt{3}+1$, $|\sqrt{3}\,\vec{k} - \vec{\ell}| = \sqrt{10}$ が成り立っている。このとき，△ABC の外心を O として，以下の問いに答えよ。



(1) 内積 $\vec{k}\cdot\vec{\ell}$ の値を $\boxed{\quad ヌ \quad}$ に記入し，∠BAC の大きさを $\boxed{\quad ネ \quad}$ に記入せよ。

(2) 辺 BC の長さを $\boxed{\quad ノ \quad}$ に記入し，∠ACB の大きさを $\boxed{\quad ハ \quad}$ に記入せよ。

(3) 直線 AO と辺 BC との交点を N とする。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AN}}$ を $\vec{k}$, $\vec{\ell}$ を用いて表した式を $\boxed{\quad ヒ \quad}$ に記せ。