

平成 25 (2013) 年度

慶應義塾大学入学試験問題

医 学 部

数 学

注意事項

1. 受験番号と氏名は解答用紙の所定の記入欄にそれぞれ記入してください。
2. 受験番号は所定欄の枠の中に1字1字記入してください。
3. 解答は、必ず解答用紙の所定の欄に記入してください。
4. この問題冊子の余白を計算および下書きに用いてください。
5. この問題冊子の総ページ数は12ページです。試験開始の合図とともにすべてのページが揃っているかどうか確認してください。ページの脱落や重複があったら直ちに監督者に申し出てください。
6. この問題冊子は、試験終了後に持ち帰ってください。

— 下書き計算用 —

— 下書き計算用 —

[I]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

(1) $3\sin\theta + \cos\theta = 3$ が成り立っているとき $\sin 2\theta =$ である。ただし $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。

(2) ゼロでない実数 x, y が関係式 $7^{\frac{1}{x}} = 9$ および $63^{\frac{1}{y}} = 3$ をみたしているとき $2x - y =$ である。

(3) 空間の3点 $A(2, 0, 0)$, $B(0, \sqrt{2}, 0)$, $C(0, 0, 1)$ を含む平面を L とする。

(i) z 軸上の点 $Q(0, 0, z)$ を通って平面 L に垂直な直線と L との交点 P の座標は

, ,

である。

(ii) 線分 QP の長さは である。

(iii) 点 P が線分 AB 上にあるとき $AP : PB =$: である。

— 下書き計算用 —

[II]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

2つの袋 A , B と赤玉, 白玉それぞれ 3 個ずつが用意されている。各々の袋の中に玉が 3 個ずつ入っている状態に対して次の操作を考える。

操作

各々の袋から玉を同時に無作為に 1 個ずつ取り出した後, 袋 A から取り出した玉を袋 B の中に, 袋 B から取り出した玉を袋 A の中に入れる。

いま, 袋 A の中に赤玉 2 個と白玉 1 個が, 袋 B の中に赤玉 1 個と白玉 2 個が入っている状態から始め, 上記の操作を繰り返し行う。また n を自然数とし, n 回目の操作を終えたときに袋 A の中に赤玉が 3 個入っている確率を a_n , 2 個だけ入っている確率を b_n , 1 個だけ入っている確率を c_n とする。

(1) $a_1 =$, $b_1 =$, $c_1 =$ である。

(2) $p_n = b_n + c_n$ と定義すると p_n と p_{n+1} の間には

$$p_{n+1} = \text{} \times p_n + \text{}$$

という関係がある。また p_n を n の式で表すと $p_n =$ である。

(3) n 回目の操作を終えたときに袋 A の中に入っている赤玉の個数の期待値を E_n とする。 E_n を n の式で表すと $E_n =$ である。

— 下書き計算用 —

[Ⅲ]

設問(1)の文章の空欄に適切な数, 式, または行列を入れて文章を完成させなさい。
 設問(2)の文章の空欄には選択肢(イ)~(チ)から適切な記号を選んで記入し, 文章を完成させなさい。また, 設問(3)に答えなさい。

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ を考える。ただし成分 a, b, c はすべて実数とする。また A と同様に $(2, 1)$ 成分がゼロである 2 次正方行列で実数を成分とするものを上三角行列とよぶことにする。

(1) $A^2 = \boxed{\text{(あ)}}$, $A^3 = \boxed{\text{(い)}}$ である。

一般に自然数 n に対して $A^n = \begin{pmatrix} s_n & t_n \\ u_n & v_n \end{pmatrix}$ とおくと $s_n = \boxed{\text{(う)}}$, $u_n = \boxed{\text{(え)}}$, $v_n = \boxed{\text{(お)}}$ である。また $a = c$ のときは $t_n = n \times \boxed{\text{(か)}}$, $a \neq c$ のときは $t_n = \frac{\boxed{\text{(き)}}}{a - c}$ と書くことができる。

(2) $X^3 = A$ をみたす上三角行列 $X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$ が存在しないための必要十分条件は $\boxed{\text{(く)}}$, 無数に存在するための必要十分条件は $\boxed{\text{(け)}}$, ただ 1 つ存在するための必要十分条件は $\boxed{\text{(こ)}}$ である。

選択肢

- | | | |
|--|-------------------------------|-------------------------------|
| (イ) $b \neq 0$ | (ロ) $ a + c > 0$ | (ハ) $a + c = 0$ かつ $b \neq 0$ |
| (ニ) $a = b = c = 0$ | (ホ) $a \neq 0$ かつ $c \neq 0$ | (ヘ) $a > 0$ または $c > 0$ |
| (ト) $a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ かつ $c \neq 0$ | (チ) $a = c = 0$ かつ $b \neq 0$ | |

(3) 3 次式 $f(x) = x^3 + kx^2 + lx + m$ において $k^2 - 3l < 0$ ならば, 任意の実数 a, b, c に対して $f(X) = A$ をみたす上三角行列 $X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$ がただ 1 つ存在することを示しなさい。ただし $f(x)$ の係数 k, l, m は実数であり, また $f(X)$ は

$$f(X) = X^3 + kX^2 + lX + mE \quad (E \text{ は単位行列})$$

により定義される行列である。

— 下書き計算用 —

[IV]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。また、設問(1)に答えなさい。

c を正の実数として、 xy 平面における曲線 C を

$$x = f(y) = c \log \frac{c + \sqrt{c^2 - y^2}}{y} - \sqrt{c^2 - y^2} \quad (0 < y \leq c)$$

により定める。

(1) 曲線 C の概形を描きなさい。

(2) C 上の点 $P(s, t)$ (ただし $s > 0$) における C の接線 l_1 の方程式を $y = ax + b$ と

するとき、 a を t の式で表すと $a = \frac{\text{(あ)}}{\sqrt{c^2 - t^2}}$ である。また l_1 が x 軸と交わる点を

A とするとき $PA = \text{(い)}$ である。

(3) $0 < h < c$ に対して、曲線 C の $h \leq y \leq c$ に対する部分と、 x 軸、 y 軸、および直線

$x = f(h)$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに回転させて得られる回転体の体積を $V(h)$

とする。このとき $\lim_{h \rightarrow +0} V(h) = \text{(う)}$ である。

(4) C 上の点 $P(s, t)$ (ただし $s > 0$) における C の法線 l_2 の方程式を $y = ax + \beta$ と

する。 a, β を t の関数とみなすとき

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{\sqrt{c^2 - t^2}} \times \text{(え)}, \quad \frac{d\beta}{dt} = \frac{da}{dt} \times \text{(お)}$$

が成り立つ。次に $x > 0$ を固定して $ax + \beta$ を t の関数とみなして $g(t)$ とおく。 t が

区間 $(0, c)$ を動くとき、 $g(t)$ は $t = \frac{2c}{\text{(か)}}$ において最大値 (き) をとる。

— 下書き計算用 —