平成25年度入学試験問題（前期）

数　　　学

注　　意

1. 合図があるまで表紙をあけないこと。
2. 問題右頁とその裏は計算に使用する。
3. 受験票は机上に出しておくこと。

数　学（前　期）

〔1〕 $\triangle ABC$において，$BC = a$，$CA = b$，$AB = c$として，頂点A，B，Cから対辺，またはその延長に下した垂線の長さをそれぞれh_a，h_b，h_cとする。いま，$\triangle ABC$内の一点Pから，辺BC，CA，AB，またはその延長に下した垂線の長さをそれぞれx_a，x_b，x_cとする。点Oを平面上の定点とする。

(1) $ah_a = bh_b = ch_c$を示せ。

(2) $\dfrac{x_a}{h_a} + \dfrac{x_b}{h_b} + \dfrac{x_c}{h_c}$は，点Pの位置によらず一定であることを示せ。

(3) 点Pを通りBCに平行な直線をひき，辺ABとの交点をDとする。$\overrightarrow{OD}$を$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，h_a，x_aで表せ。

(4) $\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OA} + l\overrightarrow{OB} + m\overrightarrow{OC}$，$k + l + m = 1$となる$k$，$l$，$m$を$x_a$，$x_b$，$x_c$，$h_a$，$h_b$，$h_c$で表せ。

〔2〕 正の数cは$c^2 = c + 1$をみたすとする。nは自然数とする。

(1) cは無理数であることを示せ。

(2) $c^n = a_n c + b_n$をみたす整数の組$(a_n,\ b_n)$が存在することを示せ。

(3) 2組の整数の組$(a_n,\ b_n)$，$(a'_n,\ b'_n)$に対して，$c^n = a_n c + b_n$，$c^n = a'_n c + b'_n$が成り立つならば，$a_n = a'_n$，$b_n = b'_n$であることを示せ。

(4) mを自然数とする。(2)，(3) で一通りに定められた整数a_n，a_{mn}に対して，a_{mn}はa_nの倍数であることを示せ。

〔3〕 $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$とする。

(1) 不等式$\dfrac{-\theta^2}{2}\dfrac{1}{\cos\theta} < \log\cos\theta < \dfrac{-\theta^2}{2}$を示せ。

(2) 極限$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\theta}{n}\right)^n$を調べよ。

(3) 極限$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\theta}{n}\right)^{n^2}$を調べよ。

〔4〕

(1) 2つの異なる自然数m，nに対して，$\displaystyle\int_{-1}^{1}\sin m\pi x\sin n\pi x\,dx$を求めよ。

(2) 自然数nに対して，$\displaystyle\int_{-1}^{1}\sin^2 n\pi x\,dx$を求めよ。

(3) 自然数nに対して，$\displaystyle\int_{-1}^{1}x\sin n\pi x\,dx$を求めよ。

(4) Nを自然数とし，$c_n\ (1 \leqq n \leqq N)$を実数として，$f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} c_n \sin n\pi x$とおく。$c_n\ (1 \leqq n \leqq N)$を変化させるとき，$\displaystyle\int_{-1}^{1}(x - f(x))^2 dx$が最小になる$c_n\ (1 \leqq n \leqq N)$の値を求めよ。

〔5〕 9本のくじがあり，当たりは3本，はずれは6本である。1本ずつくじを引く。引いたくじはもとに戻さないとする。4本のくじを引いた時点で，そのうちの当たりの数をXとする。また，自然数$k\ (1 \leqq k \leqq 9)$に対して確率変数Y_kを，丁度k回目に引いたくじが当たりならば$Y_k = 1$，はずれならば$Y_k = 0$と定める。

(1) Xの確率分布を求めよ。

(2) 起こり得る列$(Y_1,\ \cdots,\ Y_9)$の総数を求めよ。

(3) kをひとつ固定するとき，$Y_k = 1$である確率を求めよ。

(4) Xの期待値を求めよ。