

平成25年度

数 学 問 題

(理学部・工学部・医学部医学科)

注 意 事 項

- 1 問題冊子は、監督者が「解答始め」の指示をするまで開かないこと。
- 2 問題冊子は全部で2ページである。脱落のあった場合には申し出ること。
- 3 解答用紙は全部で4枚である。各ページ所定欄に、それぞれ氏名、受験学部、受験番号（最後のページは、左右2か所）を忘れずに記入すること。
- 4 解答は、すべて解答用紙の所定欄に記入すること。
- 5 解答用紙の裏面を計算に使ってもよい。
- 6 机上に各自の「受験票」と「大学入試センター試験受験票」を出しておくこと。
- 7 問題冊子は持ち帰ること。

第 1 問 (50点)

p, q は実数で, $p \neq 0$ を満たすものとする.

$$A = \begin{pmatrix} p & p-1 \\ -p & 1-p \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1-p & 1-p \\ p & p \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} q & q \\ p & p \end{pmatrix}$$

とおく. 次の問いに答えよ.

問 1 $A^2 = A, B^2 = B$ が成り立つことを示せ.

問 2 $AC = CA$ であるための必要十分条件は, $q = 1-p$, すなわち $C = B$ であることを示せ.

問 3 x, y を実数, n を自然数とすると, $(xA + yB)^n = x^n A + y^n B$ が成り立つことを示せ.

第 2 問 (50点)

座標平面の $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ の範囲において, 2つの曲線 $y = \cos x$ と $y = \sin 2x$ の交点の座標を (a, b) とし, 2つの曲線 $y = \cos x$ と $y = \tan x$ の交点の座標を (c, d) とする. 次の問いに答えよ.

問 1 a, b および d^2 の値を求めよ.

問 2 $c > a$ であることを示せ.

問 3 連立不等式

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \quad \cos x \leq y \leq \sin 2x, \quad y \geq \tan x$$

の表す領域を図示し, その領域の面積を求めよ.

第 3 問 (50点)

$a > 1$ を満たす定数 a に対し、座標が (a, a) である点を A とする。関数 $y = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) のグラフ上を動く点 $P \left(t, \frac{1}{t} \right)$ をとり、 $t > 0$ で定義された関数 $f(t)$ を、長さ AP を用いて $f(t) = AP^2$ で定める。次の問いに答えよ。

問 1 $f(t)$ を t と a を用いて表せ。

問 2 $f'(t) = 0$ となる t ($t > 0$) の値を求めよ。

問 3 AP が最小になるような点 P の座標と、 AP の最小値を求めよ。

第 4 問 (50点)

$OA = 4$, $OB = 5$ である三角形 OAB に対し、 $k = AB$, $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$ とおく。次の問いに答えよ。

問 1 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値を k を用いて表せ。

問 2 $\angle AOB$ の二等分線と辺 AB の交点を P , $\angle OAB$ の二等分線と辺 OB の交点を Q とする。 \vec{OP} , \vec{OQ} を k , \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ。

問 3 三角形 OAB の内心を I とする。 \vec{OI} を k , \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ。

問 4 問 3 の I と直線 OA 上の点 H に対して、 $IH \perp OA$ が成り立つとき、 \vec{IH} を k , \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ。

