

数 学 問 題 紙

平成 25 年 2 月 25 日

自 11 : 00

至 12 : 40

答 案 作 成 上 の 注 意

1. 数学の問題紙は 1 から 5 までの 5 ページである。
2. 解答用紙は ③ から ⑥ までの 4 枚である。
3. 解答はすべて解答用紙のおもてのみを用いて書くこと。
4. 問題紙と草案紙は持ち帰ること。

問題訂正用紙(数学)

受験者に対して、問題訂正文を受理後、直ちに「問題の訂正がありますので、黒板を見て確認してください。なお、見えにくい場合は、手をあげてください。」と口頭で伝えた上、下枠の内容を大きく黒板に書いてください。

「黒板の字が見えない。」等の申し出があった場合は、その受験者にこの用紙を見せてください。

5ページ ④ (3)

誤

(3) s と t は、次の4つの区間

正

(3) s と t は、それぞれ 次の4つの区間

問題訂正

「数学」

5 ページ 4 (4)

下から 3 行目

(誤)

……図形の面積を S とする. また, x 軸の直線 $2\pi \leq x \leq t$ の……

(正)

……図形の面積を S とする. また, x 軸の $2\pi \leq x \leq t$ の……

1 座標平面上の点 $A(1, 0)$ と曲線 $C: y = x\sqrt{x}$ を考える(ただし $x \geq 0$ とする). 曲線 C 上の点のうち, 点 A までの距離が最小となるような点を P とし, 点 P における曲線 C の接線と x 軸との交点を Q とする.

(1) 点 P の x 座標を求めよ.

(2) 点 Q の x 座標を求めよ.

(3) 曲線 C と x 軸および線分 PQ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積を V_1 とする. また, 曲線 C と x 軸および線分 AP で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積を V_2 とする. このとき $\frac{V_2}{V_1}$ の値を求めよ.

2 1 から 4 の数字が 1 つずつ書かれた正四面体のサイコロを独立に 4 回投げ、底面に書かれてある数字をサイコロを投げた順番に a_1, a_2, a_3, a_4 とする. そして、座標平面上の 2 点を $P_1(a_1, a_2), P_2(-a_3, a_4)$ とする. また、原点を O と表す.

(1) 点 P_1 が直線 $y = 2x$ 上にあり、かつ点 P_2 が直線 $y = -\frac{1}{2}x$ 上にある確率を求めよ.

(2) $\angle P_1OP_2$ が直角となる確率を求めよ.

(3) $\angle P_1OP_2$ が鋭角となる確率を求めよ.

3 曲線 $7x^2 + 2\sqrt{3}xy + 9y^2 = 30$ 上の点 (x, y) に対して, 変換

$$\begin{cases} X = x \cos \theta - y \sin \theta \\ Y = x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases}$$

を考える(ただし $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ とする). このとき X, Y のみたす式は

$$a(\theta)X^2 + b(\theta)XY + c(\theta)Y^2 = 30$$

となる. ただし, $a(\theta), b(\theta), c(\theta)$ は θ のみにより決まる定数である. いま, $b(\theta) = 0$ をみたす θ を θ_1 とする.

(1) θ_1 を求めよ.

(2) $a(\theta_1)X^2 + c(\theta_1)Y^2 = 30$ で囲まれた図形の面積を求めよ.

(3) $a(\theta_1)X^2 + c(\theta_1)Y^2 = 30$ に内接する平行四辺形の面積の最大値を求めよ.

4 関数 $f(x) = x \cos x - \sin x$ を区間 $I: \pi \leq x \leq 3\pi$ で考える.

(1) 不定積分 $\int f(x) dx$ を求めよ.

(2) 区間 I における関数 $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ.

区間 I において $f(x) = 0$ をみたす 2 点を $x = s, t$ とする. ただし $s < t$ とする.

(3) s と t は, 次の 4 つの区間

$$\pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi, \quad \frac{3}{2}\pi \leq x \leq 2\pi,$$

$$2\pi \leq x \leq \frac{5}{2}\pi, \quad \frac{5}{2}\pi \leq x \leq 3\pi$$

のどれに入るか.

(4) x 軸の $4\pi - t \leq x \leq 2\pi$ の部分, 直線 $x = 4\pi - t$, 直線 $x = 2\pi$ および $y = f(x)$ で囲まれた図形の面積を S とする. また, x 軸の直線 $2\pi \leq x \leq t$ の部分, $x = 2\pi$ および $y = f(x)$ で囲まれた図形の面積を T とする. このとき S と T の大小を比較せよ.