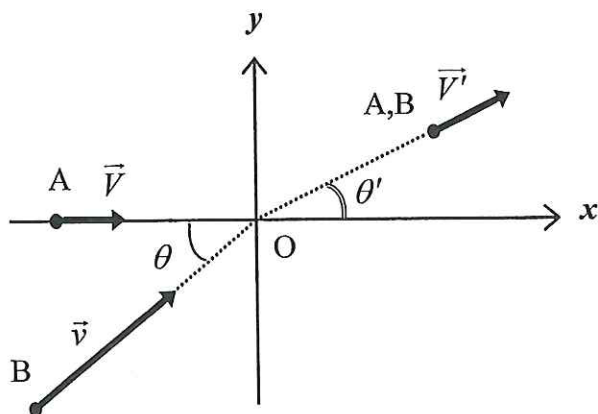


物 理

I. 図に見るように、水平で摩擦のない xy 平面上で、 x 軸上を速度 \vec{v} (大きさは V で表す) で直進している質量 M の物体 A と、 x 軸から角度 θ の方向に速度 \vec{v} (大きさは v で表す) で直進している質量 m の物体 B が、座標の原点 O において衝突した。

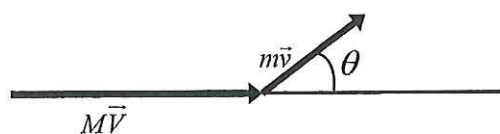
衝突後、物体 A, B は一体となって速度 \vec{V}' (大きさは V' で表す) で平面上を x 軸から角度 θ' の方向に進んだ。物体 A, B の大きさは無視できるものとして、以下の間に答えよ。文中にない量は定義してから用いること。



- (1) 物体 A, B の運動量の和に注目し、その衝突前後の関係を x 成分および y 成分に分けて記せ。
- (2) V' を M, m, V, v, θ で表せ。

さらに、 $m = \frac{1}{10}M$, $mv = \frac{1}{2}MV$ の条件で、以下の間に答えよ。

- (3) 衝突前の物体 A, B の運動エネルギーの和 E_0 、および衝突後の運動エネルギー E_1 をそれぞれ求め、 M, V, θ のみで表せ。また、衝突前後の変化 $\Delta E (= E_1 - E_0)$ を求めよ。
- (4) 衝突後の運動量ベクトルを解答用紙の図に描き入れよ。また、 θ を 0° から 180° まで変化させたとき、衝突後の運動量ベクトルの先端はどのような軌跡を描くか、解答用紙の図に描き入れよ。この図を用いて、 θ' の最大値 θ'_{\max} と、そのときの θ を求めよ。



Ⅱ. 普遍的な物理量であるエネルギーに注目することで、異なる分野の物理現象の間に類似性を見出すことができる。ここでは、コンデンサーにたくわえられる静電エネルギーと水槽にため込まれる水の位置エネルギーを対比して考える。以下の(A), (B)の文中の空欄を埋め、(C)の間に答えよ。

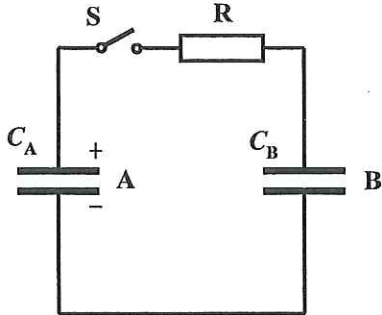


図 1

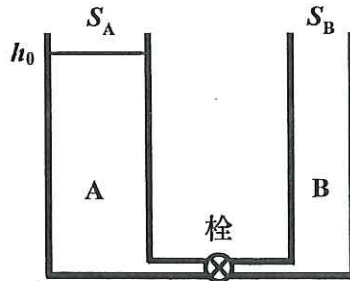


図 2

(A) コンデンサーの場合

図 1 に示すように、電気容量 C_A のコンデンサー A と電気容量 C_B のコンデンサー B が電気抵抗 R とスイッチ S でつながれている。最初、スイッチは開かれており、コンデンサー A には電荷 Q_0 がたくわえられているが、コンデンサー B の電荷は 0 であった。コンデンサー A の両端の電圧を V_0 とすると、 $Q_0 = \text{①} V_0$ と表せる。一般に、コンデンサーの電圧が V であるときに、さらに ΔQ の電荷をたくわえるのに必要なエネルギーを ΔU_e で表すと、 $\Delta U_e = \text{②} V$ で与えられる。したがって、コンデンサー A の電圧が V_0 のとき、たくわえられている静電エネルギー U_{e0} は、

$$U_{e0} = \text{③} Q_0 V_0 = \text{④} Q_0^2 \dots (1)$$

である。

次に、スイッチを閉じると抵抗を通して微少な電流が流れ、コンデンサー A の電圧はゆっくり下降し、コンデンサー B の電圧はゆっくり上昇した。十分に時間が経過した後、2つのコンデンサーの電圧はともに V_1 になった。この場合、 $V_1 = \text{⑤} Q_0$ と表せる。このとき、2つのコンデンサーにたくわえられている静電エネルギーの合計 U_{e1} は、

$$U_{e1} = \text{③} Q_0 V_1 = \text{⑥} Q_0^2 \dots (2)$$

である。(1)式と(2)式の比較から、スイッチを閉じる前後の2つのコンデンサーにたくわえられた静電エネルギーの和の変化は、 $U_{e1} - U_{e0} = \text{⑦} Q_0^2$ と求められる。

(B) 水槽の場合

図2に示すように、断面積がそれぞれ S_A , S_B の円筒水槽 A, B が同一水平面上に鉛直に置かれており、A と B は底の部分で栓のついた太さや体積の無視できる管でつながれている。最初、栓は閉じられており、水槽 A には水位（底面から水面までの高さ） h_0 まで水がため込まれているが、水槽 B は空であった。このとき、水槽 A にため込まれている水の質量 M_0 は、水の密度を ρ とすると、 $M_0 = \text{⑧} h_0$ と表せる。ここで、底面を基準とした水の位置エネルギーを考えることにしよう。一般に、水槽の水位が h であるときに、さらに質量 ΔM の水をため込むのに必要なエネルギーを ΔU_w で表すと、重力加速度を g とすれば、 $\Delta U_w = \text{⑨} h$ で与えられる。したがって、水槽 A の水位が h_0 のとき、ため込まれている水が持つ位置エネルギー U_{w0} は、

$$U_{w0} = \text{⑩} M_0 h_0 = \text{⑪} M_0^2 \dots (3)$$

である。

次に、栓を開けると水は水槽 A から水槽 B に静かに流れ、水槽 A の水位はゆっくり下降し、水槽 B の水位はゆっくり上昇した。十分に時間が経過した後、2つの水槽の水位はともに h_1 になった。この場合、 $h_1 = \text{⑫} M_0$ と表せる。このとき、2つの水槽にため込まれている水の位置エネルギーの合計 U_{w1} は、

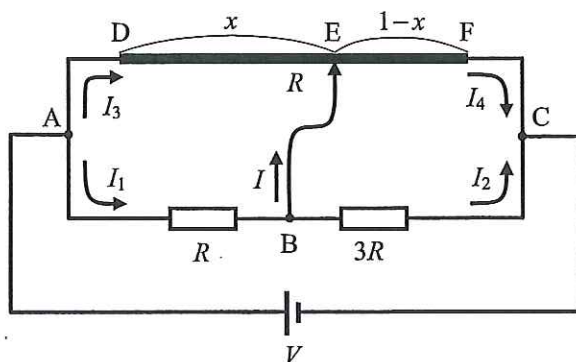
$$U_{w1} = \text{⑬} M_0 h_1 = \text{⑭} M_0^2 \dots (4)$$

である。(3)式と(4)式の比較から、栓を開ける前後の2つの水槽にため込まれた水の位置エネルギーの和の変化は、 $U_{w1} - U_{w0} = \text{⑮} M_0^2$ と求められる。

(C) 以下の問に答えよ。

- (1) (A), (B)で考察したコンデンサーと水槽に関する現象を対比させたとき、両現象に現れた物理量の間類似性を指摘せよ。
- (2) スイッチを閉じる前後のコンデンサーにたくわえられた静電エネルギーの和の変化、および、栓を開ける前後の水槽にため込まれた水の位置エネルギーの和の変化はなぜ起こったのか、それぞれ説明せよ。

Ⅲ. 図に示すように、AB間とBC間にそれぞれ抵抗値が R と $3R$ の抵抗を接続し、DF間に抵抗値が R で一樣な太さの抵抗線を接続する。BE間を導線で接続するが、Eの位置はDからFの間で動かすことができ、 $DE:EF=x:(1-x)$ で、 $0 \leq x \leq 1$ である。AC間に起電力 V の電池を接続したとき、各部分の電流を図のように I_1, I_2, I_3, I_4, I で表し、電池が供給する電力を P で表す。電池の内部抵抗は無視できるものとして、以下の間に答えよ。文中にない量は定義してから用いること。



- (1) I を I_1, I_2 で表せ。また、 I を I_3, I_4 で表せ。
- (2) $x=0$ および $x=1$ としたときのそれぞれについて、 I と P を R, V で表せ。
- (3) $I=0$ とする x を求め、このときの P を R, V で表せ。
- (4) P の一般式を x, R, V で表せ。