平成 25 年度入学者選抜試験問題

医学部医学科

数　　学

前　期　日　程

注　意　事　項

1　試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません．

2　解答用紙４枚と下書き用紙４枚は問題冊子とは別になっています．

3　問題は「第１問」，「第２問」，「第３問」，「第４問」の４問です．

4　問題の解答を，それぞれ対応した番号の解答用紙に書きなさい．

5　試験中に問題冊子の印刷不鮮明・落丁・乱丁，解答用紙の汚れなどに気が付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください．

6　監督者の指示にしたがって，４枚の解答用紙それぞれに**学部名**と**大学受験番号**を正しく記入しなさい．**学部名**と**大学受験番号**が正しく記入されていない場合は，採点されないことがあります．

7　定規は，使用してもかまいません．

8　試験終了後，問題冊子と下書き用紙は持ち帰ってください．

第1問

面積が 1 である △ABC の辺 BC 上に点 D があり，辺 CA 上に点 E があり，辺 AB 上に点 F がある．正の実数 x, y, z, w を $\mathrm{AF}:\mathrm{FB}=x:y$, $\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=y:z$, $\mathrm{CE}:\mathrm{EA}=z:w$ となるように定める．線分 AD, BE, CF が △ABC の内部の点 G で交わるとき，次の問に答えよ．

(1) 三角形の面積の比を用いて，$\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{y}{z}\cdot\dfrac{z}{w}=1$ となることを示せ．

(2) △AFE の面積を x, y, z を用いて表せ．

(3) $\alpha=\dfrac{x}{y}$, $\beta=\dfrac{y}{z}$ とする．このとき，△DEF の面積を α, β を用いて表せ．

(4) △DEF の面積が最大となるのは，点 D, E, F が各辺の中点となるときであることを示せ．

第２問

公差が 0 でない等差数列 $\{a_n\}$ において，初項から第 n 項までの和を S_n とする．また，${a_5}^2 + {a_6}^2 = {a_7}^2 + {a_8}^2$，$S_{13} = 13$ が成り立つとする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $a_5 + a_8 = a_6 + a_7$ であることを示せ．

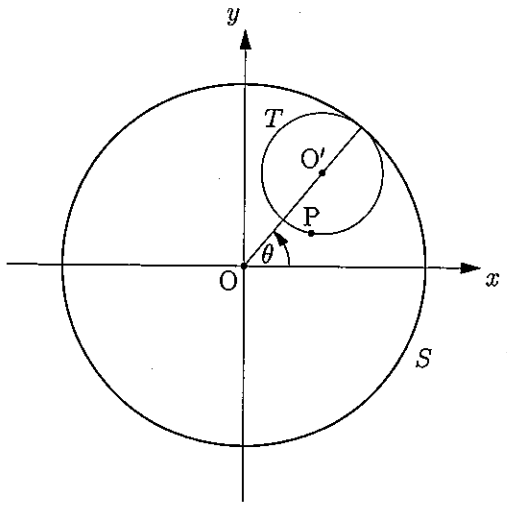
(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) S_n を求めよ．

(4) m を自然数とする．$\dfrac{a_m\, a_{m+1}}{a_{m+2}}$ の値が数列 $\{a_n\}$ の項として現れるすべての m を求めよ．

第３問

R, r を正の実数とし，$2r < R \leqq 3r$ とする．右図のように，原点 O を中心とする半径 R の固定された円 S の内部に点 O′ を中心とする半径 r の円 T があり，円 T は円 S に接しながらすべらずに転がるものとする．ただし，点 O′ は点 O のまわりを反時計まわりに動くものとする．はじめに点 O′ は $(R-r,\ 0)$ の位置にあり，円 T 上の点 P は $(R,\ 0)$ の位置にあるとする．x 軸の正の部分と動径 OO′ のなす角が θ ラジアンのとき，点 P の座標を $(x(\theta),\ y(\theta))$ とする．このとき，次の問に答えよ．



(1) $x(\theta),\ y(\theta)$ を θ を用いて表せ．

(2) $0 < \theta < \dfrac{2r}{R} \cdot \dfrac{3}{2}\pi$ において，$x(\theta)$ が最小となるときの θ の値を求めよ．

(3) $R = 3,\ r = 1$ とする．$\theta > 0$ で点 P がはじめて x 軸に到達したときの角 θ_0 を求めよ．また，$0 \leqq \theta \leqq \theta_0$ のとき，$y(\theta) \geqq 0$ を示せ．

(4) $R = 3,\ r = 1$ とする．$0 \leqq \theta \leqq \theta_0$ における点 P の軌跡と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

第4問

自然数 n に対し，座標平面上の点 $(n,\ 1)$ を P_n とする．また，r を正の実数とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 1 次変換 f は，すべての n に対して $f(\mathrm{P}_n) = \mathrm{P}_{n+1}$ を満たすとする．f を表す行列 A を求めよ．

(2) 1 次変換 g は，点 $(1,\ 1)$ を点 $(-2r,\ 1)$ に，点 $(-2r,\ 1)$ を点 $(2r^2-r,\ 1)$ に移すとする．g を表す行列 B を求めよ．

(3) $C = ABA^{-1}$ とする．行列 C^n を推定し，それが正しいことを数学的帰納法によって示せ．

(4) 行列 C^n で表される 1 次変換による点 $(1,\ r)$ の像の x 座標を x_n とする．$r < 1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ．