

数 学

注意事項

1. 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
2. 試験開始の指示があったら、すぐに「問題」と「答案用紙」および「計算用紙」の種類と枚数が以下のとおりであることを確認し、受験番号を「答案用紙」の7枚すべてに記入してください。
 - 問題 1枚
 - 答案用紙 (数学その1)～(数学その7) 各1枚 計7枚
 - 計算用紙 (その1)～(その4) 各1枚 計4枚

(この「注意事項」は「計算用紙(その4)」のうら面に印刷されています。)
3. 「問題」1枚と「答案用紙」7枚および「計算用紙」4枚の種類や枚数が異なる場合や印刷が不鮮明な場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
4. 解答は各答案用紙の指定された場所を書いてください。(数学その1)ではおもて面に解答し、(数学その1)以外では、うら面を使用する場合はその旨を記してください。
5. 「問題」1枚および「計算用紙」4枚は草案として使用してもかまいませんが、採点対象とはしません。必ず持ち帰ってください。
6. 試験終了後、「答案用紙」7枚はすべて回収します。上から(数学その1)、(数学その2)、…、(数学その7)の順に、おもて面を上にして、ひろげた状態で用紙の上下をそろえて7枚重ねてください。
7. すべての確認作業が終了するまで着席しててください。

平成 25 年度入学者選抜試験問題 (数学)

1 次の問題文の空欄 から にあてはまるものを解答欄に記入せよ。

(1) $x > 0$ において定義された関数 $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ について、最大値は である。

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -18 & 13 \end{pmatrix}$ とする。定数 a, b について $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}$ とおく。定数 k について $AP_1 = kP_1$ および $AP_2 = P_1 + kP_2$ が成り立つならば、 $(a, b, k) =$ である。このとき $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ とおくと $P^{-1}AP =$ である。

(3) 連立不等式 $\begin{cases} y \geq x^2 \\ y \leq x + \frac{5}{2} \end{cases}$ の表す領域を A とし、不等式 $x^2 + (y-1)^2 \leq r^2$ の表す領域を B_r とする。このとき $B_r \subset A$ となるような実数 r の最大値は である。

(4) 4 次式 $x^4 - 2x^3 + x^2 - 1$ を係数が整数であるような 2 次式 2 個の積に因数分解すると、 $x^4 - 2x^3 + x^2 - 1 =$ となる。方程式 $x^4 - 2x^3 + x^2 - 1 = 0$ の 4 つの解を $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ とすると、 $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 =$ であり、 $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 =$ である。

(5) $f(x) = \sin x + \cos x$ とする。各自然数 n に対して関数 $g_n(x)$ は x の n 次式で表され、

$$g_n(0) = f(0), g'_n(0) = f'(0), g''_n(0) = f''(0), \dots, g_n^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$$

を満たすものとする。このとき $g_3(x) =$ であり、 $|g_{n+1}(1) - g_n(1)| < \frac{1}{2013}$ となる最小の自然数 n は である。

2 大, 中, 小 3 個のさいころを同時に振り、出た目の数をそれぞれ a, b, c とする。

(1) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1$ となる確率を求めよ。

(2) X を $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ を超えない最大の整数とする。 X の期待値を求めよ。

3 xy 平面上の点 $P(x_0, y_0)$ から放物線 $C: y = \frac{x^2}{2}$ へ 2 本の接線がひけるとし、接点を Q, R とする。

(1) $\angle QPR = 90^\circ$ となるような点 P の軌跡を図示せよ。

(2) $\angle QPR = 45^\circ$ となるような点 P の軌跡を図示せよ。

4 次の問いに答えよ。

(1) 各自然数 n に対して $S_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!}$ とおく。各自然数 n に対して $x > 0$ のとき $S_n(x) < e^x$ であることを示せ。

(2) 関数 $f_0(x)$ をすべての実数 x で $f_0(x) = 1$ と定義する。各自然数 n に対して関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = 1 + \int_0^x \{f_{n-1}(t) + t\} dt$$

で定める。このとき各自然数 n に対して $f_n(x)$ は x の多項式であることを示し、その係数をすべて求めよ。