

# 平成 26 年度一般入試前期日程

## 数 学 問 題 紙

### 注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題紙を開いてはいけません。
2. 数学の問題紙は、2 ページあります。
3. 解答用紙は 4 枚、草案紙は 1 枚あります。
4. 受験番号は、監督者の指示に従って、全ての解答用紙の指定された箇所に必ず記入しなさい。
5. 受験番号および解答以外のことを解答用紙に書いてはいけません。
6. 解答はすべて解答用紙の指定された欄に書くこと。裏面に書かないこと。
7. 解答用紙のみを提出しなさい。問題紙、草案紙は持ち帰りなさい。

**問題 1** 関数  $f(x) = \log(1+x^2)$  について、次の問いに答えよ.

問 1  $\int_0^1 \log(1+x^2) dx$  を求めよ.

問 2 導関数  $f'(x)$  の増減を調べ、 $y = f'(x)$  のグラフの概形をかけ.

問 3 曲線  $C: y = f(x)$  と曲線  $C$  の互いに直交している 2 本の接線とで囲まれる図形の面積  $S$  を求めよ.

**問題 2**  $0 < a \leq \frac{\pi}{2}$  とし、曲線  $y = 1 - \cos x$  ( $0 \leq x \leq a$ ) を  $C$  とする.

$0 < t < a$  とし、原点と  $C$  上の点  $(t, 1 - \cos t)$  を通る直線を  $l$  とおくと、次の問いに答えよ.

問 1 曲線  $C$  と直線  $l$  とで囲まれた部分の面積を  $S_1(t)$ 、 $t \leq x \leq a$  の範囲で  $C$  と  $l$  と直線  $x = a$  とで囲まれた部分の面積を  $S_2(t)$  とおくと、 $S_1(t) + S_2(t)$  を求めよ.

問 2  $S_1(t) + S_2(t)$  を最小とする  $t$  の値を  $t_0$  とするとき、 $t_0$  を  $a$  を用いて表せ.

問 3  $\lim_{a \rightarrow +0} \frac{S_1(t_0) - S_2(t_0)}{a^3}$  を求めよ.

ただし、 $a - \frac{a^3}{3!} < \sin a < a - \frac{a^3}{3!} + \frac{a^5}{5!}$  ( $a > 0$ ) は用いてよい.

**問題 3**  $a$  を正の定数とする.  $AB = a$ ,  $AC = 2a$ ,  $\angle BAC = \frac{2}{3}\pi$  である  $\triangle ABC$  と,  $|2\overrightarrow{AP} - 2\overrightarrow{BP} - \overrightarrow{CP}| = a$  を満たす動点  $P$  がある. このとき, 次の問いに答えよ.

問 1 辺  $BC$  を  $1:2$  に内分する点を  $D$  とするとき,  $|\overrightarrow{AD}|$  を求めよ.

問 2  $|\overrightarrow{AP}|$  の最大値を求めよ.

問 3 線分  $AP$  が通過してできる図形の面積  $S$  を求めよ.

**問題 4** 一列に並んだ 3 つの部屋  $A$ ,  $B$ ,  $C$  があり, 2 頭の象がいる. 2 頭の象は毎日 1 つの部屋から隣の部屋に, 次のルールに従って移動する.

$0 < p < 1$  とし, 象が部屋  $A$  と部屋  $B$  にいるとき, 部屋  $A$  にいる象は部屋  $A$  に留まり, 部屋  $B$  にいる象が確率  $p$  で部屋  $C$  に移る. 象が部屋  $B$  と部屋  $C$  にいるとき, 部屋  $C$  にいる象は部屋  $C$  に留まり, 部屋  $B$  にいる象が確率  $1-p$  で部屋  $A$  に移る. 象が部屋  $A$  と部屋  $C$  にいるとき, 部屋  $A$  にいる象が確率  $p$  で部屋  $B$  に移り, 移らない場合は部屋  $C$  にいる象が部屋  $B$  に移る. 2 頭の象が同時に同じ部屋にいることはできない.

はじめに 2 頭の象はそれぞれ部屋  $A$  と部屋  $B$  にいるものとし,  $2n$  日後に象が部屋  $A$  にいる確率を  $a_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) とおく. このとき, 次の問いに答えよ.

問 1  $a_1$  を求めよ.

問 2  $a_{n+1}$  を  $a_n$  を用いて表せ.

問 3  $p = \frac{2}{3}$  のとき,  $a_n$  を求めよ.