C — 1

平成26年度入学者選抜学力検査問題

数　　　学

注　意　事　項

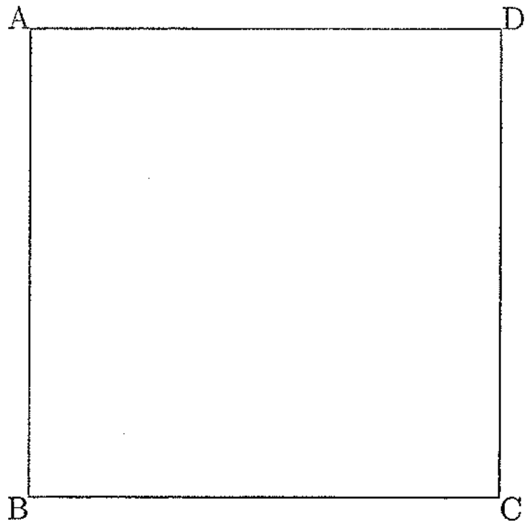
1. この冊子は，監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 「問題の選択に関する注意」は裏表紙に記載してあるので，この冊子を裏返して必ず読み，志望学部・学科等により解答すべき問題の番号を確認すること。ただし，この冊子を開いてはいけません。
3. 監督者から指示があったら，解答用紙の上部の所定欄には受験番号，座席番号を，また，下部の所定欄には座席番号をそれぞれ必ず記入すること。
4. 解答は，問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定以外の解答用紙に書かれた解答は0点となることがあります。
5. 解答は，解答用紙の裏面に書かないこと。
6. 各問題とも，特に指示がないかぎり，必ず解答の過程を書き，結論を明示すること。小問に分けられているときには，小問の結論を明示すること。
7. この冊子は13頁です。落丁／乱丁または印刷の不備なものがあれば申し出ること。
8. 下書き等は，この冊子の余白の部分を使用すること。
9. 退室の際には，解答用紙は記入の有無にかかわらず机上に置いておくこと。持ち帰ってはいけません。
10. この冊子は持ち帰ってかまいません。

問題の選択に関する注意

志望学部・学科等により，以下に示す番号の問題に解答すること。

科目	学部・学科等		解答する問題番号
数学I 数学A	教育学部	算数科選修， 技術科教育分野	1 2 3 4
数学I 数学II 数学A 数学B	文学部 教育学部 法政経学部 園芸学部	行動科学科 情報教育分野	1 4 6 7
	先進科学プログラム	物理化学・生命化学分野， 人間科学関連分野	1 4 6 7
	教育学部	数学科教育分野	1 2 3 4 6 7
数学I 数学II 数学III 数学A 数学B	先進科学プログラム	物理学分野， 電気電子工学分野， ナノサイエンス分野， 画像科学分野， 情報画像分野	5 6 8 9 10
数学I 数学II 数学III 数学A 数学B 数学C	理学部 薬学部 工学部	物理学科，化学科， 生物学科，地球科学科	5 6 8 9 10
	医学部		5 6 10 11 13
	理学部	数学・情報数理学科	5 6 8 10 12 13

1 下図のような1辺の長さ10cmの正方形ABCDがある。点Pおよび点Qは時刻0にAおよびBをそれぞれ出発し，正方形ABCDの周上を反時計回りに毎秒1cm進む。また，点Rは時刻0にBを出発し，正方形ABCDの周上を反時計回りに毎秒2cm進む。点RがAに達するまでに△PQRの面積が35cm^{2}となる時刻をすべて求めよ。



◇M4(847—45)

2 △ABC において，∠A, ∠B, ∠C の大きさをそれぞれ A, B, C とするとき，次の等式が成り立つとする。

$$\frac{\sin A}{5} = \frac{\sin B}{3}$$

また，A, B, C のうち最も大きな角は 120° であるとする。このとき，$\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ の値をそれぞれ求めよ。

3 pは奇数である素数とし，$N=(p+1)(p+3)(p+5)$ とおく。

(1) Nは48の倍数であることを示せ。

(2) Nが144の倍数になるようなpの値を，小さい順に5つ求めよ。

4 A, B ふたりは，それぞれ1から4までの番号のついた4枚のカードを持ち，それを用いて何回かの勝負から成るつぎのゲームをする。

- 初めに A, B はそれぞれ4枚のカードを自分の袋に入れ，よくかきまぜる。
- A, B はそれぞれ自分の袋から無作為に1枚ずつカードを取り出し，そのカードを比較して1回の勝負を行う。すなわち，大きい番号のついたカードを取り出したほうがこの回は勝ちとし，番号が等しいときはこの回は引き分けとする。
- 袋から取り出したカードは袋に戻さないものとする。
- A, B どちらかが2回勝てば，カードの取り出しをやめて，2回勝ったほうをゲームの勝者とする。4枚すべてのカードを取り出してもいずれも2回勝たなければゲームは引き分けとする。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1) Aが0勝0敗4引き分けしてゲームが引き分けになる確率を求めよ。

(2) Aが1勝1敗2引き分けしてゲームが引き分けになる確率を求めよ。

(3) Aがゲームの勝者になる確率を求めよ。

$\boxed{5}$ 袋の中に，赤玉が3個，白玉が7個が入っている。袋から玉を無作為に1つ取り出し，色を確認してから，再び袋に戻すという試行を行う。この試行を N 回繰り返したときに，赤玉を A 回 (ただし $0 \leqq A \leqq N$) 取り出す確率を $p(N, A)$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 確率 $p(N, A)$ を N と A を用いて表せ。

(2) N が10の倍数，すなわち $N = 10n$ となる自然数 n があるとする。確率 $p(10n, 0), p(10n, 1), \ldots, p(10n, 10n)$ のうち，一番大きな値は $p(10n, 3n)$ であることを次の手順により証明せよ。

(i) 0以上の整数 a，自然数 b に対して，$\dfrac{b!}{a!} \leqq b^{b-a}$ を示す。ただし $0! = 1$ とする。

(ii) 0以上 $10n$ 以下の整数 m に対して，$\dfrac{p(10n, m)}{p(10n, 3n)} \leqq 1$ を示す。

$\boxed{\mathbf{6}}$ 座標平面上に，原点を中心とする半径 1 の円と，その円に外接し各辺が x 軸または y 軸に平行な正方形がある。円周上の点 $(\cos\theta, \sin\theta)$（ただし $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$）における接線と正方形の隣接する 2 辺がなす三角形の 3 辺の長さの和は一定であることを示せ。また，その三角形の面積を最大にする θ を求めよ。

7 実数 a に対し，関数 $f(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} |t+1|\,dt + a$ を考える。曲線 $C : y = f(x)$ が x 軸と 2 個の共有点を持つための a の範囲を求めよ。またこのとき曲線 C と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。

8 座標平面上に，円 $C:(x-1)^2+(y-1)^2=1$ と点 $\mathrm{Q}(1,2)$ がある。点 P_1 の座標を $(3,0)$ とし，x 軸上の点 P_2, P_3, ... を以下の条件によって決め，P_n の座標を $(p_n,0)$ とする。

点 P_n から円 C に接線を引き，その y 座標が正である接点を T_n とする。このとき，3 点 Q, T_n, P_{n+1} は同一直線上にある。$(n=1,2,\ldots)$

このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 点 T_1 の座標を求めよ。

(2) 点 P_2 の座標を求めよ。

(3) 点 T_n の座標を p_n の式で表せ。

(4) 点 P_n の座標を n の式で表せ。

9 n, m を 0 以上の整数とし，

$$I_{n,m} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta \sin^m\theta \, d\theta$$

とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $n \geqq 2$ のとき，$I_{n,m}$ を $I_{n-2,m+2}$ を使って表せ。

(2) 次の式

$$I_{2n+1,2m+1} = \frac{1}{2}\int_0^1 x^n(1-x)^m \, dx$$

を示せ。

(3) 次の式

$$\frac{n!m!}{(n+m+1)!} = \frac{{}_m\mathrm{C}_0}{n+1} - \frac{{}_m\mathrm{C}_1}{n+2} + \cdots + (-1)^m \frac{{}_m\mathrm{C}_m}{n+m+1}$$

を示せ。ただし $0! = 1$ とする。

10 関数 $f(x) = e^{\sin x}(\sin 2x - 2\cos x)$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ の値を求めよ。

(2) $0 \leqq x < 2\pi$ における $f(x)$ の最大値を求めよ。

(3) $x \geqq 0$ のとき $(x^2 + 2x - 2)e^x \geqq f(x)$ が成り立つことを示せ。

11 関数 $f(x) = x^x$ $(x > 0)$ と正の実数 a について，以下の問いに答えよ。

(1) $\frac{1}{4} \leqq x \leqq \frac{3}{4}$ における $f(x)f(1-x)$ の最大値および最小値を求めよ。

(2) $\frac{1}{4} \leqq x \leqq \frac{3}{4}$ における $\dfrac{f(x)f(1-x)f(a)}{f(ax)f(a(1-x))}$ の最小値を求めよ。

12 以下の問いに答えよ。

(1) $t > 0$ のとき

$$e^t > 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}$$

が成り立つことを示せ。

(2) 座標平面上の点 $(0, a)$ を通って曲線 $y = xe^x$ に何本の接線が引けるか求めよ。

13 自然数 n に対して，和

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

を考える。

(1) 各自然数 n に対して $2^k \leqq n$ をみたす最大の整数 k を $f(n)$ で表すとき，2つの奇数 a_n, b_n が存在して

$$S_n = \frac{a_n}{2^{f(n)} b_n}$$

と表されることを示せ。

(2) $n \geqq 2$ のとき S_n は整数にならないことを示せ。

(3) さらに，自然数 m, n $(m < n)$ に対して，和

$$S_{m,n} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{n}$$

を考える。$S_{m,n}$ はどんな m, n $(m < n)$ に対しても整数にならないことを示せ。