平　成　26　年　度
医学部前期入学試験問題

数　　学

（時間：120 分）

注　意　事　項

1　試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。

2　試験中に問題冊子の印刷不鮮明および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。

3　解答は，すべて解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

4　問題冊子の余白は，計算等に用いて構いません。

5　試験終了後，解答用紙のみを回収します。

〔1〕 以下の各問いに答えよ。

(1) a は実数とする。極限 $\displaystyle\lim_{x \to +0} \int_x^2 t^a dt$ を調べよ。

(2) α, β $\left(0 < \alpha \leqq \beta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ が $\tan\alpha \tan\beta = 1$ を満たすとき，$\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$ であることを示せ。

(3) 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が楕円 $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ の上を動くとき，$3x^2 - 16xy - 12y^2$ の値が最大になる点 P の座標を求めよ。

(4) 公正なサイコロを 2 回振り，1 回目に出た目を a，2 回目に出た目を b とする。また，公正なコインを 1 回投げ，表が出たら $c = 1$，裏が出たら $c = -1$ とする。O を原点とする座標平面上の 2 点 A，B を $\mathrm{A}(a,\ b)$，$\mathrm{B}(b,\ ca)$ と定める。次の問いに答えよ。

(i) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が垂直になる確率を求めよ。

(ii) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が平行になる確率を求めよ。

(iii) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の期待値を求めよ。

(iv) $\triangle\mathrm{OAB}$ の面積の期待値を求めよ。ただし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が平行になるときは面積を 0 とする。

〔2〕 $\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = 1$，$\angle\mathrm{AOB} < \dfrac{\pi}{2}$ の $\triangle\mathrm{OAB}$ を含む平面を H とする。平面 H 上に無い点 C から平面 H，直線 OA，直線 OB に降ろした垂線の足をそれぞれ D，E，F とする。$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$p = \vec{a} \cdot \vec{b}$，$q = \vec{b} \cdot \vec{c}$，$r = \vec{c} \cdot \vec{a}$ として，以下の問いに答えよ。ただし，$\vec{a} \cdot \vec{b}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積である。

(1) $\vec{a} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DE}} = 0$ であることを示せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ および p，q，r で表せ。

(3) EF の長さを p，q，r で表せ。

(4) $p = \dfrac{1}{5}$，$q = 1$，$r = 2$ であるとき，OD の長さを求めよ。

〔3〕 a は定数とする。関数 $f(x) = \dfrac{1 - a\cos x}{1 + \sin x}$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $t = \dfrac{-\cos x}{1 + \sin x}$ $(0 < x < \pi)$ とおくとき，$\dfrac{dx}{dt}$ を t で表せ。

(2) $f(x)$ が $0 < x < \pi$ の範囲で極値をもつように a の値の範囲を定めよ。また，その極値を a で表せ。

(3) a が(2)で定めた範囲にあるとき，2 点 $(0,\ f(0))$，$(\pi,\ f(\pi))$ を通る直線と $y = f(x)$ のグラフで囲まれる図形を x 軸の周りに回転してできる回転体の体積を a で表せ。