

平成 26 年 度

# 数 学

## 注意事項

1. 問題は 3 題で，すべて必答問題です.
2. 解答はすべて別紙(解答用紙 3 枚)の該当する欄に記入しなさい.
3. 解答用紙の裏面を使用する場合は，表面の右下に「裏面に続く」と記入し，表面の下の部分を持って上にめくり記入しなさい. 表面とは書く方向が反対になります.
4. 図やグラフは解答の中で重要な位置をしめます. その特徴をおさえて，ていねいに描きなさい.
5. 解答者がたどる道筋や問題解決に至る要点を明確に意識して，論述式的答案を読みやすく書きなさい.
6. 問題用紙の余白は，下書きやミスがないかどうか見直すのに十分活用しなさい.

1

(必答問題) (配点 75)

$p$  を正の実数として、放物線  $C: y^2 = 4px$  を定める。  $C$  の頂点を  $O$ 、焦点を  $F$ 、準線を  $l: x = -p$  とする。  $C$  上の 2 点  $A(a, 2\sqrt{pa})$  ( $a > 0$ ) と  $B(b, -2\sqrt{pb})$  ( $b > 0$ ) を考えるとき、以下の問いに答えよ。

- (1)  $A$  における  $C$  の接線を  $l(A)$  とし、  $l(A)$  と準線  $l$  との交点を  $P$  とする。  $l(A)$  の方程式をかいて、  $P$  の座標を求めよ。 また、線分  $AP$  の長さは線分  $AF$  の長さより大きいことを示せ。
- (2) 接線  $l(A)$  が直線  $AB$  と  $A$  において直交するとき、  $b$  を  $a, p$  を用いて表せ。 また  $a$  が  $0 < a < \infty$  の範囲内を動くとき、  $b$  の最小値を求めよ。

以下(2)の最小値を実現する  $C$  上の 2 点を  $A_0, B_0$  とし、接線  $l(A_0)$  と準線  $l$  の交点を  $P_0$  とする。

- (3) 直線  $OA_0$  と直線  $P_0B_0$  は  $O$  において直交することを示せ。
- (4)  $\triangle A_0OB_0$  の面積を  $S$ 、線分  $A_0B_0$  と  $C$  で囲まれた図形の面積を  $T$  とするとき、比  $S:T$  を求めよ。

**2**

(必答問題) (配点 75)

関数  $f(x) = \frac{3\sqrt{3}}{\sin x} - \frac{1}{\cos x}$  ( $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ ) を考える。以下の問いに答えよ。

- (1)  $y = f(x)$  の増減表を作成し、極値を求めよ。
- (2)  $f(x)$  の第 2 次導関数  $f''(x)$  は、3 次式  $P(t) = t(2t^2 - 1)$  を用いて、
$$f''(x) = 3\sqrt{3} P\left(\frac{1}{\sin x}\right) - P\left(\frac{1}{\cos x}\right)$$
 と表されることを示せ。また、 $0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$  のとき  $f''(x_1) > f''(x_2)$  となることを示せ。
- (3)  $k$  を定数とするとき、方程式  $f(x) = k$  の異なる実数解は何個あるか。  $k$  の値によって分類せよ。
- (4)  $y = f(x)$  の変曲点はただ 1 つ存在することを示せ。また、この変曲点が第何象限にあるか、調べよ。

**3**

(必答問題) (配点 50)

(1)  $r$  は自然数,  $n$  は  $r$  より大きい整数とする.

2 項係数  ${}_{k+r}C_r$  ( $k = 0, 1, \dots, n - r$ ) の次の等式を示せ.

$$\sum_{k=0}^{n-r} {}_{k+r}C_r = {}_{n+1}C_{r+1}$$

以下整数  $n$  ( $n \geq 2$ ) に対し, 次の確率分布に従う確率変数  $X$  を考える.

$$P(X = k) = \frac{{}_{k+1}C_1}{{}_{n+1}C_2} \quad (k = 0, 1, \dots, n - 1)$$

(2)  $X$  の期待値  $\mu_n = E(X)$  を求めよ. また,  $P(X \geq m) \geq \frac{1}{2}$  を満たす最大の整数  $m$  を  $M_n$  とするとき, 極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n}{\mu_n}$  を求めよ.