一般入試　数学

I　$\boxed{\text{シ}}$ の解答は解答群の中から最も適当なものを1つ選べ.

n を100以下の自然数とし，n の約数の個数を $f(n)$，空集合を ϕ とする.

(a) $f(48)=$ $\boxed{\text{アイ}}$ であり，$f(n)=9$ を満たす最小の自然数は $n=$ $\boxed{\text{ウエ}}$ である. $f(n)=5$ を満たす n の個数は $\boxed{\text{オ}}$ 個であり，$f(n)=6$ を満たす n の個数は $\boxed{\text{カキ}}$ 個である.

(b) $f(n)$ の最大値は $\boxed{\text{クケ}}$ である. したがって，$f(f(n))>4$ を満たす最小の自然数は $n=$ $\boxed{\text{コサ}}$ となる.

(c) $f(n)=2$ を満たす100以下の自然数 n の集合を A，100以下の素数の集合を B とすると，$\boxed{\text{シ}}$ が成り立つ.

$\boxed{\text{シ}}$ の解答群

① $A \in B$　② $B \in A$　③ $A = B$

④ $A \subset B$ かつ $A \neq B$　⑤ $B \subset A$ かつ $A \neq B$　⑥ $A \cap B = \phi$

⑦ $A \cap B \neq \phi$ かつ $A \neq A \cup B \neq B$

Ⅱ $\boxed{\text{ツ}}$ の解答は解答群の中から最も適当なものを1つ選べ．

区間 $\frac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \frac{2}{3}\pi$ を定義域とする関数 $f(\theta) = 2\sin^2\theta + 4\sin\theta\cos\theta + 4\cos^2\theta$ について，以下の問いに答えよ．

(a) $f(\theta)$ は次の形に変形できる．

$$f(\theta) = \sqrt{\boxed{\text{ア}}}\,\sin(2\theta + \alpha) + \boxed{\text{イ}}$$

ただし，α は $\tan\alpha = \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ を満たし，$\tan\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\boxed{\text{オ}}} - \boxed{\text{カ}}$ が成り立つ．

(b) $f(\theta)$ は，$\theta = \dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\pi$ のとき最小値 $\boxed{\text{ケ}}\sqrt{\boxed{\text{コ}}} + \dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ をとり，

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ス}}} - \boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

を満たす θ において最大値 $\sqrt{\boxed{\text{タ}}} + \boxed{\text{チ}}$ をとる．

(c) k を正の定数とすると，方程式 $x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2 = k$ で表される図形は $\boxed{\text{ツ}}$ である．この曲線と，

$$x^2 + y^2 = 4,\ -1 \leqq x \leqq \sqrt{3},\ y > 0$$

で表わされる弧が接するように k を定めると，2つの曲線の共通接線の傾きは

$$\frac{-\sqrt{\boxed{\text{テ}}} - \boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$

となる．

$\boxed{\text{ツ}}$ の解答群

① 円　② 放物線　③ 楕円　④ 双曲線

Ⅲ $\boxed{\text{ケ}}$，$\boxed{\text{ヌ}}$，$\boxed{\text{ネ}}$ の解答は解答群の中から最も適当なものを１つ選べ．

３点A，B，Cがそれぞれx軸，y軸，z軸上にあり，原点Oを頂点に持つ３つの三角形OAB，OBC，OCAの面積の比が$1:\sqrt{3}:\sqrt{5}$となっている．三角形ABCを含む平面をαとする．

(a) 平面α上にある点Pの位置ベクトルを$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$と表わすと，$s+t+u=\boxed{\text{ア}}$ が成り立つ．

(b) ４点O，A，B，Cを通る球面の中心をDとすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

と表わされる．

直線ODと平面αの交点Gは，線分ODを $\boxed{\text{ク}}$ ：１に内分する．点Gは三角形ABCの $\boxed{\text{ケ}}$ である．

(c) 原点Oから平面αに下ろした垂線の足をHとすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\overrightarrow{\mathrm{OC}},$$

点Dから平面αに下ろした垂線の足をEとすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

が成り立つ．

点Gは線分EHを１： $\boxed{\text{ニ}}$ に内分する．

点Hは三角形ABCの $\boxed{\text{ヌ}}$ であり，点Eは三角形ABCの $\boxed{\text{ネ}}$ である．

$\boxed{\text{ケ}}$，$\boxed{\text{ヌ}}$，$\boxed{\text{ネ}}$ の解答群

① 重心
② 内心
③ 外心
④ 垂心
⑤ 三辺の中点を通る円の中心
⑥ 頂点A，Bにおける外角の二等分線の交点
⑦ 頂点B，Cにおける外角の二等分線の交点
⑧ 頂点A，Cにおける外角の二等分線の交点

Ⅳ　実数 x に対し

$$f(x)=e^{3x}+e^{-3x},\qquad g(x)=e^{3x}-e^{-3x}$$

で定義される2つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ および $h(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$ で与えられる関数 $h(x)$ について，以下の問いに答えよ.

(a)　関数 $f(x)$，$g(x)$ は

$$\frac{d}{dx}f(x)=\boxed{\text{ア}}\,g(x),\qquad \frac{d}{dx}g(x)=\boxed{\text{イ}}\,f(x)$$

という関係を満たす．また，関数 $h(x)$ に対して

$$h(0)=\boxed{\text{ウ}},\quad \lim_{x\to\infty}h(x)=\boxed{\text{エ}},\quad \lim_{x\to-\infty}h(x)=\boxed{\text{オカ}},$$

$$\frac{d}{dx}h(x)=\frac{\boxed{\text{キク}}}{(f(x))^2}$$

が成り立つ.

(b)　x 座標が $a=\dfrac{1}{3}\log_e 2$ である点 $(a,\ h(a))$ における，曲線 $y=h(x)$ の接線を C とする.

接線 C と直線 $y=\boxed{\text{エ}}$ の交点の x 座標を b とすると，$b-a=\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}$ となる.

(c)　$x\geqq a$ の領域において，接線 C，曲線 $y=h(x)$，直線 $y=\boxed{\text{エ}}$ および直線 $x=t(>b)$ で囲まれた図形の面積を $S(t)$ とすると，

$$\lim_{t\to\infty}S(t)=\frac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セソ}}}+\frac{1}{\boxed{\text{タ}}}\log_e\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

が成り立つ.