前期日程試験

平成 26 年度医学科入学試験問題

数　　学

〔注意事項〕

1 監督者の指示があるまで，この冊子を開いてはいけない。

2 **解答用紙に受験番号と氏名を必ず記入すること。**

3 この問題冊子の本文は，４ページからなっている。落丁，乱丁及び印刷不鮮明な箇所等があれば，手をあげて監督者に知らせなさい。

4 この問題冊子の計算用紙と余白は，適宜下書きに使用してもよい。

5 解答は，すべて別紙「解答用紙」の指定された場所に記入すること。

6 この問題冊子は持ち帰ること。

1 a，bを正の実数とする。eは自然対数の底とし，必要ならば$2.7 < e$を用いてもよい。

(1) $a < b$とする。このとき$a^b = b^a$ならば$1 < a < e < b$であることを証明せよ。

(2) $\sqrt{5}^{\sqrt{7}}$と$\sqrt{7}^{\sqrt{5}}$の大小を比較せよ。

2 1辺の長さが2の正四面体ABCDをTとおく。直線BDと平行な平面HでTを切断したところ，Hは辺AB，BC，CD，DAとそれぞれ点P，Q，R，Sで交わり，PS : QR = 2 : 3となった。

(1) 2直線PSとBDは平行であることを証明せよ。

(2) △PBQと△SDRは合同であることを証明せよ。

(3) $\mathrm{PS} = 2a \ \left(0 < a < \dfrac{2}{3}\right)$とおくとき，四角形PQRSの面積$S(a)$を$a$を用いて表せ。

(4) $S(a)$が最大となるaの値を求めよ。

3 $f(x)=\log\dfrac{x^2+1}{2}$ とおく。xy 平面上の円 C と曲線 D: $y=f(x)$ は D のすべての変曲点で接しているとする。ただし，2つの曲線がある点で接するとはその点で共通の接線をもつことをいう。

(1) 増減，凹凸に注意して関数 $y=f(x)$ のグラフをかけ。

(2) C の方程式を求めよ。

(3) C と D の共有点は D の変曲点のみであることを証明せよ。

(4) C と D で囲まれた部分の面積を求めよ。

4 xy 平面上の曲線 $C : x^3 + y^3 = 26$ を考える。C 上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ で，a，b がともに有理数のとき P を C 上の有理点という。例えば $(-1,\ 3)$ や $\left(\dfrac{53}{28},\ \dfrac{75}{28}\right)$ は C 上の有理点である。$h(x) = \dfrac{x(-x^3 + 52)}{2x^3 - 26}$ とおく。

(1) $a^3 + b^3 = 26$ $(a \neq \sqrt[3]{13},\ b \neq \sqrt[3]{13})$ のとき，$\{h(a)\}^3 + \{h(b)\}^3$ の値を求めよ。

(2) 有理数 $\dfrac{p}{q}$ (p，q は互いに素な整数で $q > 0$) に対して，$h\left(\dfrac{p}{q}\right)$ を $\dfrac{p'}{q'}$ (p'，q' は互いに素な整数で $q' > 0$) と表す。p が奇数ならば，p' は奇数で $q' \geqq 2q$ であることを証明せよ。ただし，2つの整数が互いに素とは，その最大公約数が 1 であることをいう。

(3) C 上には無数の有理点が存在することを証明せよ。