

平成26年度入学試験問題(前期)

数 学

注 意

1. 合図があるまで表紙をあけないこと。
2. 問題右頁とその裏は計算に使用する。
3. 受験票は机に出しておくこと。

# 数 学 (前 期)

[ 1 ] 数列  $\{x_n\}$  を次のように定める。

$$x_1 = \sqrt{3}, \quad x_{n+1} = \frac{x_n}{\sqrt{1+x_n^2+1}} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

- (1) 数列  $\{x_n\}$  は減少数列であることを示せ。
- (2)  $x_n = \tan \theta_n$  により  $\theta_n$  ( $0 < \theta_n < \frac{\pi}{2}$ ) を定める。数列  $\{\theta_n\}$  の一般項を求めよ。
- (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n x_n$  を求めよ。

[ 2 ]

- (1)  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$  の因数分解を利用して、正の数  $x, y, z$  に対して不等式  $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$  を示せ。
- (2) 正の数  $a, b, c$  は関係式  $abc = a + b + c + 2$  をみたしながら変化する。積  $abc$  の最小値を求めよ。

[ 3 ]  $a, b$  ( $a > b$ ) を正の定数として、 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  を楕円  $C$  の方程式とする。

- (1)  $C$  上の点  $P(u, v)$  における  $C$  の接線の方程式を求めよ。
- (2) この楕円の2つの焦点  $(\sqrt{a^2 - b^2}, 0), (-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$  から(1)の接線に下ろした垂線2本の長さの積は、接点  $P$  のとり方によらず一定であることを示し、積の値を求めよ。

[ 4 ]

- (1) 多項式  $f(x)$  に関数  $F(x)$  を  $F(x) = \int_0^1 f(x-t) dt$  のように対応させる。このとき、 $F(x) = kf(x)$  となる実数  $k$  と3次多項式  $f(x)$  は存在しないことを示せ。
- (2)  $A, B$  を  $(A, B) \neq (0, 0)$  である定数として、 $f(x) = A \cos x + B \sin x, g(x) = A \cos x - B \sin x$  とおく。 $f(x)$  に関数  $F(x)$  を  $F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x-t) dt$  のように対応させる。 $A, B$  がある関係式をみたすとき、ある実数  $k$  により  $F(x) = kg(x)$  となることを示し、 $A, B$  のみたす関係式と  $k$  の値を求めよ。

[ 5 ]  $1, 2, \dots, n$  の番号をつけた  $n$  枚のカードが2組ある。合計  $2n$  枚のカードを箱に入れてよくかき混ぜて1枚ずつ順番にすべてのカードを取り出す。 $1 \leq i \leq n$  として、 $i$  番目に取り出したカードの番号を  $a_i$  とし、また、 $n+i$  番目に取り出したカードの番号を  $b_i$  とする。

- (1)  $n = 2$  のとき、どの  $i$  に対しても  $a_i \neq b_i$  である確率を求めよ。
- (2)  $n = 3$  のとき、どの  $i$  に対しても  $a_i \neq b_i$  である確率を求めよ。
- (3)  $n = 4$  のとき、どの  $i$  に対しても  $a_i \neq b_i$  である確率を求めよ。