

平成26年度

数 学 問 題

(理学部・工学部・医学部医学科)

注 意 事 項

- 1 問題冊子は、監督者が「解答始め」の指示をするまで開かないこと。
- 2 問題冊子は全部で2ページである。脱落のあった場合には申し出ること。
- 3 解答用紙は全部で4枚である。各ページ所定欄に、それぞれ氏名、受験学部、受験番号（最後のページは、左右2か所）を忘れずに記入すること。
- 4 解答は、すべて解答用紙の所定欄に記入すること。
- 5 解答用紙の裏面を計算に使ってもよい。
- 6 机上に各自の「受験票」と「大学入試センター試験受験票」を出しておくこと。
- 7 問題冊子は持ち帰ること。

第 1 問 (50点)

a, b を実数とし, 定積分 $\int_0^\pi (x - a - b \cos x)^2 dx$ の値を $I(a, b)$ とおく. 次の問いに答えよ.

問 1 不定積分 $\int \cos^2 x dx$ を求めよ.

問 2 不定積分 $\int x \cos x dx$ を求めよ.

問 3 $I(a, b)$ を a, b を用いて表せ.

問 4 a, b が実数全体を動くときの $I(a, b)$ の最小値, および, $I(a, b)$ が最小値をとるとき a, b の値を求めよ.

第 2 問 (50点)

$a > 0, b > 0$ とし, 座標平面上の楕円 $K: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の 2 点 $A(a \cos \theta, b \sin \theta), B\left(a \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right), b \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right)$ のそれぞれにおける K の接線を l, m とする. ただし, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ とする. 2 直線 l と m の交点を $C(c, d)$ とし, さらに 2 点 $D\left(a \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right), 0\right), E(c, 0)$ をとる. 台形 $CBDE$ の面積を S とする. 次の問いに答えよ.

問 1 c および d を a, b, θ を用いて表せ.

問 2 S を a, b, θ を用いて表せ.

問 3 θ が $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ の範囲を動くときの S の最大値, および, S が最大値をとるとき m の傾きを a, b を用いて表せ.

第 3 問 (50点)

1次変換 f は点 $(1, 3)$ を点 $(3, 5)$ へ、点 $(1, -1)$ を点 $(1, -1)$ へ移すとする。 f を表す行列を A とするとき、次の問いに答えよ。

問 1 A を求めよ。

問 2 A^2, A^3 を求めよ。

問 3 自然数 n に対して A^n を推測し、その推測が正しいことを数学的帰納法によって証明せよ。

第 4 問 (50点)

座標空間内に4点 $A(0, -1, 0)$, $B(2, t, 1-t)$, $C(0, s, -1)$, $D(3, 2, 1)$ がある。ただし、 t と s は実数で $t > -1$ をみたし、また \overrightarrow{AB} と \overrightarrow{AC} は垂直であるとする。次の問いに答えよ。

問 1 s を t を用いて表せ。

問 2 \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} の両方に垂直で大きさが1のベクトル $\vec{n} = (p, q, r)$ のうち $p > 0$ となるものを t を用いて表せ。

問 3 4点 A, B, C, D が同一平面に含まれるための必要十分条件は、 $t = -\frac{1}{3}$ または $t = 1$ であることを証明せよ。

