数学問題紙

平成26年2月25日

自　　11：00

至　　12：40

答案作成上の注意

1. 数学の問題紙は1から5までの5ページである。

2. 解答用紙は ③ から ⑥ までの4枚である。

3. 解答はすべて解答用紙のおもてのみを用いて書くこと。

4. 問題紙と草案紙は持ち帰ること。

1 三角形ABCに内接する半径Rの円がある．内接円と辺BC，CA，ABとの接点をそれぞれD，E，Fとする．また$\alpha = \angle\mathrm{A}$，$\beta = \angle\mathrm{B}$，$\gamma = \angle\mathrm{C}$とする．三角形ABCの面積を$S_1$，三角形DEFの面積を$S_2$とする．

(1) S_1をR，$\tan\dfrac{\alpha}{2}$，$\tan\dfrac{\beta}{2}$，$\tan\dfrac{\gamma}{2}$を用いて表せ．

(2) S_2をR，$\cos\dfrac{\alpha}{2}$，$\cos\dfrac{\beta}{2}$，$\cos\dfrac{\gamma}{2}$を用いて表せ．

以後$\gamma = \dfrac{\pi}{2}$とする．

(3) $\dfrac{S_2}{S_1}$を$\sin\alpha$と$\cos\alpha$を用いて表せ．

(4) $\dfrac{S_2}{S_1}$の最大値を求めよ．

2 表と裏の出る確率が等しい硬貨を n 回投げる．このとき，表が出る回数が n の半分以上である確率を a_n とし，表が出る回数が n の半分より大きい確率を b_n とする．

(1) a_1，a_2，a_3 および b_1，b_2，b_3 をそれぞれ求めよ．

(2) $a_n - b_n$ を n を用いて表せ．

(3) a_n を n を用いて表せ．

3 aを$0 < a < 1$とする．座標空間の4点を$\mathrm{O}(0, 0, 0)$，$\mathrm{A}(1, 0, 0)$，$\mathrm{B}\left(0, \dfrac{1}{a}, 0\right)$，$\mathrm{C}\left(0, 0, \dfrac{1}{1-a}\right)$とする．また，4点O，A，B，Cを頂点とする四面体に内接する球をSとする．

(1) 3点A，B，Cを通る平面に直交し長さが1のベクトルをaを用いて表せ．

(2) 3点A，B，Cを通る平面と球Sの接点の座標をaを用いて表せ．

(3) 球Sの半径をaを用いて表せ．

(4) 球Sの体積の最大値を求めよ．

4 関数$f(x)$を$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$とする.

(1) 関数$g(x)=\log(x+\sqrt{x^2+1})$の導関数を求めよ.

(2) 二つの曲線$y=f(x)$と$y=1-f(x)$で囲まれる図形の面積を求めよ.