

# 平成 26 年度 個別学力試験問題

## 数 学 (120 分)

- 社会・国際学群 (社会学類, 国際総合学類)  
 人間学群 (教育学類, 心理学類, 障害科学類)  
 生命環境学群 (生物学類, 生物資源学類, 地球学類)  
 理工学群 (数学類, 物理学類, 化学類, 応用理工学類, 工学システム学類, 社会工学類)  
 情報学群 (情報科学類, 情報メディア創成学類, 知識情報・図書館学類)  
 医学群 (医学類, 医療科学類)

### 注 意

- 1 問題冊子は1ページから6ページまでである。
- 2 受験者は、志望する学類の解答すべき問題を下表で確認のうえ、解答しなさい。選択問題も含まれているので十分注意すること。  
 ※ ○印のついた問題は必ず解答し、△印もしくは□印のついた問題については選択解答すること。それ以外の問題を解答してはならない。
- 3 解答用紙は問題に対応するものを使用すること。
- 4 国際総合学類においては、「数学Ⅱ・数学B」または「数学Ⅲ・数学C」の問題のいずれかを選択解答すること。
- 5 教育学類および障害科学類においては、「数学Ⅱ・数学B」、「数学Ⅲ」または「数学C」の問題のいずれかを選択解答すること。

学 類	解答すべき問題						備 考
	数学Ⅱ	数学Ⅲ	数学B	数学C			
	1	2	3	4	5	6	
社会学類	○			○			○印の問題2問を解答すること。
国際総合学類	「数学Ⅱ・数学B」選択者	○			○		○印の問題2問を解答すること。
	「数学Ⅲ・数学C」選択者		△	△		□ □	△印の中から1問、□印の中から1問を選択解答。計2問を解答すること。
教育学類	「数学Ⅱ・数学B」選択者	○			○		○印の問題2問を解答すること。
障害科学類	「数学Ⅲ」選択者		○	○			○印の問題2問を解答すること。
	「数学C」選択者					○ ○	○印の問題2問を解答すること。
心理学類	○	△	△	○	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問を選択解答。計4問を解答すること。
生物学類	○	○	○	△	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問を選択解答。計5問を解答すること。
生物資源学類	○	○	○	△	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問を選択解答。計5問を解答すること。
地球学類	△	○	○	△	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計5問を解答すること。
数学類	△	○	○	△	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計5問を解答すること。
物理学類	△	○	○	△	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計5問を解答すること。
化学類	△	○	○	△	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計5問を解答すること。
応用理工学類	△	○	○	△	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から3問を選択解答。計5問を解答すること。
工学システム学類	△	○	○	△	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から3問を選択解答。計5問を解答すること。
社会工学類	△	○	○	△	□	□	○印の問題は必ず解答。△印の中から1問、□印の中から1問を選択解答。計4問を解答すること。
情報科学類	△	○	○	△	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計5問を解答すること。
情報メディア創成学類	△	○	○	△	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計5問を解答すること。
知識情報・図書館学類	△	△	△	□	□	□	△印の中から1問、□印の中から1問を選択解答。計2問を解答すること。
医学類	○	○	○	△	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問を選択解答。計5問を解答すること。
医療科学類	○	○	○	△	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問を選択解答。計5問を解答すること。

[ 1 ]  $f(x) = x^3 - x$  とする。  $y = f(x)$  のグラフに点  $P(a, b)$  から引いた接線は 3 本あるとする。 3 つの接点  $A(a, f(a))$ ,  $B(\beta, f(\beta))$ ,  $C(\gamma, f(\gamma))$  を頂点とする三角形の重心を  $G$  とする。

(1)  $a + \beta + \gamma$ ,  $a\beta + \beta\gamma + \gamma a$  および  $a\beta\gamma$  を  $a, b$  を用いて表せ。

(2) 点  $G$  の座標を  $a, b$  を用いて表せ。

(3) 点  $G$  の  $x$  座標が正で、  $y$  座標が負となるような点  $P$  の範囲を図示せよ。

[2]  $xy$  平面上の曲線  $C: y = x \sin x + \cos x - 1$  ( $0 < x < \pi$ ) に対して、以下の問いに答えよ。ただし  $3 < \pi < \frac{16}{5}$  であることは証明なしで用いてよい。

(1) 曲線  $C$  と  $x$  軸の交点はただ 1 つであることを示せ。

(2) 曲線  $C$  と  $x$  軸の交点を  $A(a, 0)$  とする。  $a > \frac{2}{3}\pi$  であることを示せ。

(3) 曲線  $C$ 、 $y$  軸および直線  $y = \frac{\pi}{2} - 1$  で囲まれる部分の面積を  $S$  とする。また、 $xy$  平面の原点  $O$ 、点  $A$  および曲線  $C$  上の点  $B\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - 1\right)$  を頂点とする三角形  $OAB$  の面積を  $T$  とする。  $S < T$  であることを示せ。

[3] 関数  $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$  を  $x > 0$  で考える。  $y = f(x)$  のグラフの点  $(a, f(a))$  における接線を  $\ell_a$  とし、  $\ell_a$  と  $y$  軸との交点を  $(0, Y(a))$  とする。以下の問いに答えよ。ただし、実数  $k$  に対して  $\lim_{t \rightarrow \infty} t^k e^{-t} = 0$  であることは証明なしで用いてよい。

(1)  $Y(a)$  がとりうる値の範囲を求めよ。

(2)  $0 < a < b$  である  $a, b$  に対して、  $\ell_a$  と  $\ell_b$  が  $x$  軸上で交わる時、  $a$  のとりうる値の範囲を求め、  $b$  を  $a$  で表せ。

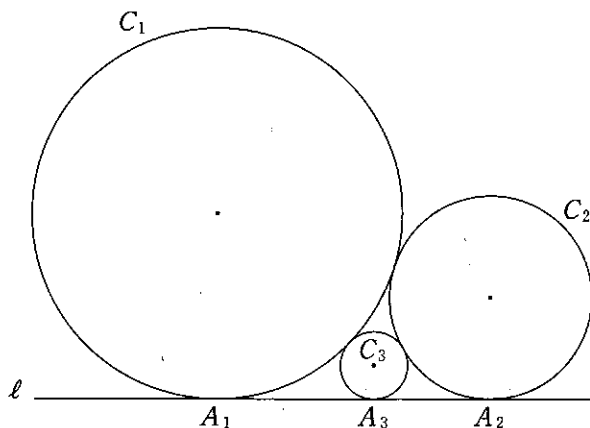
(3) (2) の  $a, b$  に対して、  $Z(a) = Y(a) - Y(b)$  とおく。  $\lim_{a \rightarrow +0} Z(a)$  および  $\lim_{a \rightarrow +0} \frac{Z'(a)}{a}$  を求めよ。

[4] 平面上の直線  $l$  に同じ側で接する 2 つの円  $C_1, C_2$  があり,  $C_1$  と  $C_2$  も互いに外接している。  $l, C_1, C_2$  で囲まれた領域内に, これら 3 つと互いに接する円  $C_3$  を作る。同様に  $l, C_n, C_{n+1} (n = 1, 2, 3, \dots)$  で囲まれた領域内にあり, これら 3 つと互いに接する円を  $C_{n+2}$  とする。円  $C_n$  の半径を  $r_n$  とし,  $x_n = \frac{1}{\sqrt{r_n}}$  とおく。このとき, 以下の問いに答えよ。ただし,  $r_1 = 16, r_2 = 9$  とする。

- (1)  $l$  が  $C_1, C_2, C_3$  と接する点を, それぞれ  $A_1, A_2, A_3$  とおく。線分  $A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3$  の長さおよび  $r_3$  の値を求めよ。
- (2) ある定数  $a, b$  に対して  $x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n (n = 1, 2, 3, \dots)$  となることを示せ。  $a, b$  の値も求めよ。
- (3) (2) で求めた  $a, b$  に対して, 2 次方程式  $t^2 = at + b$  の解を  $\alpha, \beta (\alpha > \beta)$  とする。  $x_1 = c\alpha^2 + d\beta^2$  を満たす有理数  $c, d$  の値を求めよ。ただし,  $\sqrt{5}$  が無理数であることは証明なしで用いてよい。
- (4) (3) の  $c, d, \alpha, \beta$  に対して,

$$x_n = c\alpha^{n+1} + d\beta^{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

となることを示し, 数列  $\{r_n\}$  の一般項を  $\alpha, \beta$  を用いて表せ。



[5] 実数を成分とする正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

について、以下の問いに答えよ。

(1)  $AB = BA$  を満たす  $A$  は、実数  $x, y$  を用いて  $A = xB + yE$  と表せることを示せ。

(2)  $A^3 = E$  のとき

$$(t^2 - \Delta)A = (t\Delta + 1)E$$

を示せ。ただし、 $t = a + d$ ,  $\Delta = ad - bc$  とする。

(3)  $AB = BA$  かつ  $A^3 = E$  を満たす  $A$  をすべて求めよ。

[6]  $xy$  平面上に楕円

$$C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad (a > \sqrt{13})$$

および双曲線

$$C_2: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b > 0)$$

があり、 $C_1$  と  $C_2$  は同一の焦点をもつとする。また  $C_1$  と  $C_2$  の交点

$P\left(2\sqrt{1 + \frac{t^2}{b^2}}, t\right) (t > 0)$  における  $C_1$ ,  $C_2$  の接線をそれぞれ  $\ell_1$ ,  $\ell_2$  とする。

- (1)  $a$  と  $b$  の間に成り立つ関係式を求め、点  $P$  の座標を  $a$  を用いて表せ。
- (2)  $\ell_1$  と  $\ell_2$  が直交することを示せ。
- (3)  $a$  が  $a > \sqrt{13}$  を満たしながら動くときの点  $P$  の軌跡を図示せよ。

