平成27年度一般入試前期日程

数 学 問 題 紙

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題紙を開いてはいけません。
2. 数学の問題紙は，２ページあります。
3. 解答用紙は４枚，草案紙は１枚あります。
4. 受験番号は，監督者の指示に従って，全ての解答用紙の指定された箇所に必ず記入しなさい。
5. 受験番号および解答以外のことを解答用紙に書いてはいけません。
6. 解答はすべて解答用紙の指定された欄に書くこと。裏面に書かないこと。
7. 解答用紙のみを提出しなさい。問題紙，草案紙は持ち帰りなさい。

問題 1　$f(p,q,r)=p^3-q^3-27r^3-9pqr$ について，次の問いに答えよ．

問 1　$f(p,q,r)$ を因数分解せよ．

問 2　等式 $f(p,q,r)=0$ と $p^2-10q-30r=11$ との両方を満たす正の整数の組 (p,q,r) をすべて求めよ．

問題 2　n を正の整数とする．$2n\pi \leqq x \leqq (2n+1)\pi$ の範囲で関数 $f(x)=x\sin x$ を考える．関数 $f(x)$ が極大値をとる x を a_n とし，曲線 $y=f(x)$ の変曲点を $(b_n, f(b_n))$ とする．次の問いに答えよ．

問 1　a_n と b_n はそれぞれ唯（ただ）1つあって，$2n\pi < b_n < 2n\pi+\dfrac{\pi}{2} < a_n < (2n+1)\pi$ を満たすことを示せ．

問 2　以下の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-2n\pi)$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(b_n-2n\pi)$　　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}f(b_n)$

問 3　曲線 $y=f(x)$ $(2n\pi \leqq x \leqq (2n+1)\pi)$ と x 軸とで囲まれた図形を，3つの直線 $x=b_n$，$x=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$x=a_n$ によって4つの部分に分ける．その面積を左から順に S_1，S_2，S_3，S_4 とするとき，$(S_3+S_4)-(S_1+S_2)$ の値を求めよ．

問 4　以下の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_1$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_3$　　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(S_4-S_2)$

問題 3　曲線 $C : y = \sin^2 x$ について，C 上の点 $(t, \sin^2 t)$ $\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ における C の接線と直線 $x = a$ との交点を P とする．ただし，a は $0 \leqq a \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とする．このとき，次の問いに答えよ．

問 1　点 P の y 座標を $f(t)$ とおくとき，$f(t)$ を求めよ．

問 2　関数 $f(t)$ の増減を調べ，その最大値と最小値を求めよ．

問 3　t が $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，点 $(t, \sin^2 t)$ における C の接線が通るすべての点のうち，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ となるものの範囲を xy 平面に図示せよ．

問題 4　四面体 OAPQ において，$\angle \mathrm{AOP} = \angle \mathrm{AOQ} = \angle \mathrm{POQ} = 60^\circ$，$\mathrm{OA} = 1$，$\mathrm{OP} = p$，$\mathrm{OQ} = q$ とし，頂点 A から平面 OPQ に下ろした垂線を AH とする．ただし，$p \leqq q$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

問 1　内積 $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を p，q を用いて表せ．

問 2　AH の長さを求めよ．

問 3　$p + q = 3$，および $\triangle \mathrm{APQ}$ の面積が 1 のとき，以下の値を求めよ．

(1)　pq　　　(2)　p　　　(3)　四面体 OAPQ の体積