C－1

平成27年度入学者選抜学力検査問題

数　学

注　意　事　項

1. この冊子は，監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 「問題の選択に関する注意」は裏表紙に記載してあるので，この冊子を裏返して必ず読み，志望学部・学科等により解答すべき問題の番号を確認すること。ただし，この冊子を開いてはいけません。
3. 監督者から指示があったら，解答用紙の上部の所定欄には受験番号，座席番号を，また，下部の所定欄には座席番号をそれぞれ必ず記入すること。
4. 解答は，問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定以外の解答用紙に書かれた解答は0点となることがあります。
5. 解答は，解答用紙の裏面に書かないこと。
6. 各問題とも，特に指示がないかぎり，必ず解答の過程を書き，結論を明示すること。小問に分けられているときには，小問の結論を明示すること。
7. この冊子は13頁です。落丁／乱丁または印刷の不備なものがあれば申し出ること。
8. 下書き等は，この冊子の余白の部分を使用すること。
9. 退室の際には，解答用紙は記入の有無にかかわらず机上に置いておくこと。持ち帰ってはいけません。
10. この冊子は持ち帰ってかまいません。

$\boxed{1}$

a を実数とする。x に関する方程式

$$|x^2-6x-|x-6||+x=a$$

の実数解の個数を求めよ。

2

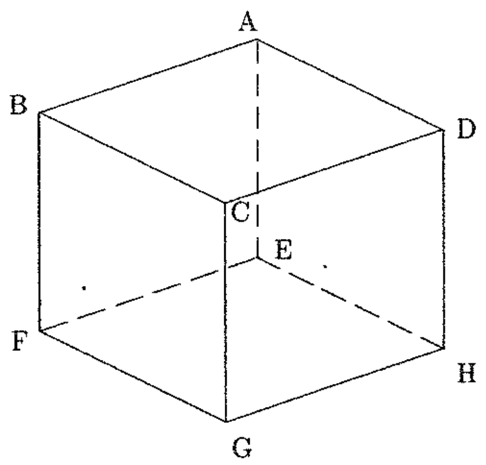
下図のような1辺の長さが4の立方体ABCD-EFGHがある。辺AB上に点PをBP=3となるように取り，辺BC上に点Qを取る。また，Bから△PFQへ垂線BKを下ろす。

BQの長さをaとして，以下の問いに答えよ。

(1) aを用いて△PFQの面積を表せ。

(2) aを用いてBKの長さを表せ。

(3) BKの長さは$\dfrac{\sqrt{30a}}{5}$以下であることを示せ。



◇M4(695—46)

3

1辺の長さ1の正三角形 ABC において，BC を1：2に内分する点を D，CA を1：2に内分する点を E，AB を1：2に内分する点を F とし，さらに BE と CF の交点を P，CF と AD の交点を Q，AD と BE の交点を R とする。

このとき，△PQR の面積を求めよ。

4

さいころを5回振るとき，初めの4回においては6の目が偶数回出て，しかも最後の2回においては6の目がちょうど1回出る確率を求めよ。

ただし，6の目が一度も出ない場合も6の目が出る回数を偶数回とみなす。

5

m を実数とする。x に関する方程式

$$x^3 - 3x - |x - m| = 0$$

の実数解の個数を求めよ。

6

k, m, n を自然数とする。以下の問いに答えよ。

(1) 2^k を 7 で割った余りが 4 であるとする。このとき, k を 3 で割った余りは 2 であることを示せ。

(2) $4m + 5n$ が 3 で割り切れるとする。このとき, 2^{mn} を 7 で割った余りは 4 ではないことを示せ。

$\boxed{7}$

b と c を $b^2+4c>0$ を満たす実数として, x に関する 2 次方程式 $x^2-bx-c=0$ の相異なる解を α, β とする。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \alpha^{n-1} + \beta^{n-1} \, (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定める。このとき, つぎの問いに答えよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ は漸化式

$$a_{n+2} = ba_{n+1} + ca_n \, (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たすことを示せ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の項 a_n がすべて整数であるための必要十分条件は, b, c がともに整数であることである。これを証明せよ。

$\boxed{8}$

コインを n 回続けて投げ, 1回投げるごとに次の規則に従って得点を得るゲームをする。

- コイン投げの第1回目には, 1点を得点とする。
- コイン投げの第2回目以降において, ひとつ前の回と異なる面が出たら, 1点を得点とする。
- コイン投げの第2回目以降において, ひとつ前の回と同じ面が出たら, 2点を得点とする。

例えばコインを3回投げて (裏, 表, 裏) の順に出たときの得点は, $1+1+1=3$ より3点となる。また (裏, 裏, 表) のときの得点は, $1+2+1=4$ より4点となる。

コインの表と裏が出る確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ とし, このゲームで得られる得点が m となる確率を $P_{n,m}$ とおく。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) $n \geqq 2$ が与えられたとき, $P_{n,2n-1}$ と $P_{n,2n-2}$ を求めよ。

(2) $n \leqq m \leqq 2n-1$ について, $P_{n,m}$ を n と m の式で表せ。

$\boxed{9}$

双曲線 $x^2-y^2=1\cdots$① の漸近線 $y=x\cdots$② 上の点 $\mathrm{P}_0:(a_0,a_0)$ (ただし $a_0>0$) を通る双曲線①の接線を考え，接点を Q_1 とする。Q_1 を通り漸近線②と垂直に交わる直線と，漸近線②との交点を $\mathrm{P}_1:(a_1,a_1)$ とする。次に P_1 を通る双曲線①の接線の接点を Q_2, Q_2 を通り漸近線②と垂直に交わる直線と，漸近線②との交点を $\mathrm{P}_2:(a_2,a_2)$ とする。この手続きを繰り返して同様にして点 $\mathrm{P}_n:(a_n,a_n)$, Q_n を定義していく。

(1) Q_n の座標を a_n を用いて表せ。

(2) a_n を a_0 を用いて表せ。

(3) $\triangle\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n-1}$ の面積を求めよ。

10

0 以上の整数 n に対して, 整式 $T_n(x)$ を

$$T_0(x)=1,\quad T_1(x)=x,\quad T_n(x)=2xT_{n-1}(x)-T_{n-2}(x)\quad (n=2,3,4,\cdots)$$

で定める。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) 0 以上の任意の整数 n に対して

$$\cos(n\theta)=T_n(\cos\theta)$$

となることを示せ。

(2) 定積分

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)dx$$

の値を求めよ。

11 c を実数とし, 曲線 $y = x^2 + c \cdots$ ① と曲線 $y = \log x \cdots$ ② の共通接線を考える。

(1) 共通接線の本数を, 実数 c の値によって答えよ。

(2) 共通接線が1本であるとき, その接線と ①, ② それぞれとの接点を求めよ。

(3) 共通接線が1本であるとき, ①, ② と x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ。

◇M4(695—55)

$\boxed{12}$

平面上に2つの円

$$C_1:\ x^2+y^2=1, \qquad C_2:\ \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$$

があり，点 $(-1,0)$ で接している。

点 P_1 は C_1 上を反時計周りに一定の速さで動き，点 P_2 は C_2 上を反時計周りに一定の速さで動く。二点 P_1, P_2 はそれぞれ点 $(1,0)$ および点 $(-1,0)$ を時刻 0 に同時に出発する。P_1 は C_1 を一周して時刻 2π に点 $(1,0)$ に戻り，P_2 は C_2 を二周して時刻 2π に点 $(-1,0)$ に戻るものとする。P_1 と P_2 の中点を M とおく。

P_1 が C_1 を一周するときの点 M の軌跡の概形を図示して，その軌跡によって囲まれる図形の面積を求めよ。

13

関数 $f(x)=|x+2\sin(x+a)+b|$ の $0 \leqq x \leqq 2\pi$ での最大値と最小値の差は, 定数 a, b によらず常に π 以上で, かつ $\left(\dfrac{4\pi}{3}+2\sqrt{3}\right)$ 以下であることを示せ。

問題の選択に関する注意

志望学部・学科等により，以下に示す番号の問題に解答すること。

科目	学部・学科等		解答する問題番号
数学Ⅰ 数学A	教育学部	算数科選修， 技術科教育分野	1 2 3 4
数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学A 数学B	文学部 教育学部 法政経学部 園芸学部 先進科学プログラム	行動科学科 情報教育分野 物理化学・生命化学分野， 人間科学関連分野	3 4 5 6
	教育学部	数学科教育分野	2 3 4 5 6 7
数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学Ⅲ 数学A 数学B	理学部 薬学部 工学部 先進科学プログラム	物理学科，化学科， 生物学科，地球科学科 物理学分野， 電気電子工学分野， ナノサイエンス分野， 画像科学分野， 情報画像分野	7 8 9 10 11
	医学部		7 8 9 12 13
	理学部	数学・情報数理学科	6 7 8 9 11 12