平　成　27　年　度

# 数　　　学

**注意事項**

1. 問題は4題で，すべて必答問題です．
2. 解答はすべて別紙(解答用紙4枚)の該当する欄に記入しなさい．
3. 解答用紙の裏面を使用する場合は，表面の右下に「**裏面に続く**」と記入し，表面の下の部分を持って上にめくり記入しなさい．表面とは書く方向が反対になります．
4. **図**や**グラフ**は解答の中で重要な位置をしめます．その特徴をおさえて，ていねいに描きなさい．
5. 解答者がたどる道筋や問題解決に至る要点を明確に意識して，**論述式**の答案を読みやすく書きなさい．
6. 問題用紙の余白は，下書きや**ミスがないかどうか見直す**のに十分活用しなさい．

$\boxed{1}$ （必答問題）（配点 50）

数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_1 = \dfrac{1}{3}$ および漸化式

$$(n+2)a_n - 2(n+1)a_{n+1} + (n+1)a_n a_{n+1} = 0$$

$(n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ を満たす．以下の問いに答えよ．

(1) $a_2$ を求めよ．

(2) すべての自然数 $n$ について $a_n \neq 0$ が成り立つことを証明せよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(4) $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ とする．このとき，すべての自然数 $n$ について $S_n < 2$ が成り立つことを証明せよ．

## $\boxed{2}$ (必答問題)(配点 50)

整数ではない実数 $x$ に対して $f(x) = \dfrac{1}{x - [x]}$ と定める．
ただし，$[x]$ は $l < x < l + 1$ を満たす整数 $l$ を表す．以下の問いに答えよ．

(1) $f(\sqrt{2})$，$f(f(\sqrt{2}))$ を計算し，簡潔な形で答えよ．

(2) $f(\sqrt{3})$，$f(f(\sqrt{3}))$，$f(f(f(\sqrt{3})))$ を計算し，簡潔な形で答えよ．

(3) 自然数 $n$ に対して，$n < x < n + 1$ かつ $f(x) = x$ を満たす $x$ を求めよ．

(4) 自然数 $n$ を1つ固定する．$n < x < n + 1$ の範囲の $x$ で，$f(x)$ が整数ではなく，さらに $f(f(x)) = x$ を満たす $x$ を大きい順に並べる．その中の $x$ で $f(x) = x$ を満たすものは何番目に現れるかを答えよ．

**3** (必答問題) (配点 50)

$t$ は実数で $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ を満たすとする．平面上に点 O$(0, 0)$，A$(-1, 0)$，P$(\cos t, \sin t)$，Q$(1, \sin t)$ をとる．このとき以下の問いに答えよ．

(1) 点 A と点 P を通る直線を $l$，点 O と点 Q を通る直線を $m$ とする．このとき $l$，$m$ の交点 R の座標を求めよ．

(2) $t$ が $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲全体を動くときに点 R が描く曲線を $C$ とする．このとき，点 $(x, y)$ $(x > 0, y > 0)$ が $C$ 上にあるための条件を $x$，$y$ の式で表せ．

(3) 曲線 $C$ の点 R における接線を $n$ とする．ある $t$ に対して直線 $l$，$m$ がなす鋭角と直線 $m$，$n$ がなす鋭角が等しくなる．この状況のもとで，以下の問いに答えよ．

(a) 点 P$(\cos t, \sin t)$ の座標を求めよ．

(b) 直線 $l$ と $n$ のなす鋭角を $\theta$ とおく．また，点 O を中心とし半径が 1 の円と直線 $n$ との 2 交点のうち，$y$ 座標が正の点を S$(\cos\phi, \sin\phi)$ とおく．このとき，$\theta = \phi$ を示せ．

$\boxed{4}$ (必答問題) (配点 50)

$\alpha$, $\beta$ を

$$\alpha = \lim_{n \to \infty}\left(\frac{(3n+1)(3n+2)(3n+3)\cdots(3n+n)}{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+n)}\right)^{\frac{1}{n}}$$

および

$$\beta = \lim_{n \to \infty}\left(\frac{(3n^2+1^2)(3n^2+2^2)(3n^2+3^2)\cdots(3n^2+n^2)}{(n^2+1^2)(n^2+2^2)(n^2+3^2)\cdots(n^2+n^2)}\right)^{\frac{1}{n}}$$

とおく．このとき $\alpha < \beta$ を示せ．また，$\alpha$ と $\beta$ の値をそれぞれ求めよ．