

(解答はすべて解答用紙に記入すること)

第 1 問 3 個のさいころ A, B, C を同時に投げて、出た目をそれぞれ a, b, c とする。このとき、座標平面上の 2 点 $P(a, 0), Q(b, c)$ について次の問いに答えよ。

問 1 線分 PQ の長さが 1 となる確率は $\frac{\text{(ア)}}{\text{(イ)}}$ である。

問 2 線分 PQ の長さが最大となるとき、その最大値は $\sqrt{\text{(ウ)}}$ である。また線分 PQ の長さが最大となる確率は $\frac{\text{(エ)}}{\text{(オ)}}$ である。

問 3 2 点 P, Q を通る直線の傾きが 2 となる確率は $\frac{\text{(カ)}}{\text{(キ)}}$ である。

問 4 線分 PQ 全体が円 $x^2 + y^2 = 12$ の内部にある確率は $\frac{\text{(ク)}}{\text{(ケ)}}$ である。

問 5 線分 PQ が放物線 $y = \frac{7}{2} - x^2$ と共有点をもたない確率は $\frac{\text{(コ)}}{\text{(サ)}}$ である。

第 2 問 分母が偶数、分子が自然数であって、0 より大きく 1 より小さい分数を次のように並べた数列を考える。また、 n を自然数とすると、第 n 群が $2n$ 個の項を含むようにこの数列を区分する。次の問いに答えよ。

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \mid \frac{2}{4}, \frac{3}{4} \mid \frac{1}{6}, \frac{2}{6} \mid \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8} \mid \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10} \mid \frac{5}{10}, \dots$
 第 1 群 第 2 群 第 3 群 第 4 群 ...

問 1 この数列の第 50 項は第 (ア) 群に含まれ、この群の第 (イ) 項目である。

問 2 第 9 群の第 3 項目は $\frac{\text{(ウ)}}{\text{(エ)}}$ である。

問 3 第 n 群の末項は $\frac{\text{(オ)}n + \text{(カ)}}{\text{(キ)}n + \text{(ク)}}$ である。

問 4 第 n 群に含まれるすべての項の和は $\text{(ケ)}n - \frac{\text{(コ)}}{\text{(サ)}}$ である。

問 5 この数列の初項から第 111 項までの和は (シ) である。

第 3 問 曲線 $C: y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$ ($0 < x < 1$) 上の点 P における接線 ℓ が x 軸と交わる点を Q とし、P から x 軸に下ろした垂線を PR とする。点 P の x 座標を a とするとき、次の問いに答えよ。

問 1 Q の x 座標を a で表すと $\frac{\text{(ア)}}{\text{(イ)}}a^3 + \frac{\text{(ウ)}}{\text{(エ)}}a$ である。

問 2 QR の長さを a で表すと $-\frac{\text{(オ)}}{\text{(カ)}}a^3 + \frac{\text{(キ)}}{\text{(ク)}}a$ である。

問 3 QR の長さが最大となる a の値は $\frac{\sqrt{\text{(ケ)}}}{\text{(コ)}}$ である。このときの QR の長さは $\frac{\sqrt{\text{(サ)}}}{\text{(シ)}}$ で、Q の座標は

$\left(\frac{\text{(ス)}}{\text{(ソ)}} \sqrt{\frac{\text{(セ)}}{\text{(ソ)}}}, \text{(タ)} \right)$ である。また、 ℓ の方程式は $y = -\frac{\text{(チ)}}{\text{(テ)}} \sqrt{\frac{\text{(ツ)}}{\text{(テ)}}}x + \text{(ト)}$ である。

問 4 a が問 3 で求めた値のとき、C と ℓ と y 軸とで囲まれた部分の面積は $\log \frac{\sqrt{\text{(ナ)}} \left(\sqrt{\text{(ニ)}} + \text{(ヌ)} \right)}{\text{(ネ)}} - \frac{\sqrt{\text{(ノ)}}}{\text{(ハ)}}$ で

ある。