

入学試験問題(1次)

数 学

平成 27 年 1 月 26 日

9 時 00 分—10 時 20 分

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いて見てはならない。
- 2 この冊子は、9 ページである。落丁、乱丁、印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出よ。
- 3 解答には必ず黒鉛筆(またはシャープペンシル)を使用せよ。
- 4 解答用紙の指定欄に受験番号、氏名を忘れずに記入せよ。
- 5 解答は、必ず解答用紙の所定の解答欄に記入せよ。
- 6 解答の記入の仕方については、次ページ冒頭および解答用紙に書いてある注意に従え。
- 7 この冊子の余白は、草稿用に使用してよい。ただし、切り離してはならない。
- 8 解答用紙およびこの問題冊子は、持ち帰ってはならない。

No.					
-----	--	--	--	--	--

上の枠内に受験番号を記入せよ。

設問ごとに、与えられた選択肢の中から最も適当なものを一つだけ選び、解答用紙の該当する記号を塗り潰せ。

1 整式 $x^4 + ax^3 + bx^2 - 25x - 132$ が、整式 $x^2 + x - 12$ で割り切れるとき、 $a + b$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

2 $\log_2 a + \log_2 b = 1$ ， $\log_c a + \log_c b = 3$ (a, b, c は正の実数， $c \neq 1$) がともに成立しているとき、 $2 \log_c (a + b)$ の最小値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

3 関数 $f(x) = 9^x + 9^{-x} - \frac{20}{9}(3^{1-x} + 3^{1+x})$ (x は正の実数) は、 $x = a$ のとき最小値をとる。 a の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

4 $x = 2 + \sqrt{3}$, $y = 2 - \sqrt{3}$ のとき, $\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right)$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 チ 4
ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

5 a, b は整数とする ($ab \neq 0$)。 $\frac{2}{a} + \frac{3}{b} = 1$ を満たす (a, b) は, 何組あるか。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 チ 4
ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

6 2つの放物線 $C1: y = x^2$, $C2: y = x^2 - ax + a + \frac{a^3}{2}$ (a は正の実数) について考える。直線 L は $C1, C2$ にそれぞれ点 A, B で接する。点 A, B の x 座標をそれぞれ p, q としたとき, $p + q - a^2$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 チ 4
ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

7 四角形 ABCD は、円に内接する。各辺は、それぞれ、 $AB = 2$ 、 $BC = 3$ 、 $CD = 4$ 、 $DA = 5$ であるとする。四角形 ABCD の面積を S とするとき、 $\frac{S}{\sqrt{30}}$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

8 2つの点 $A(1, -2, 3)$ 、 $B(3, 2, 2)$ と xy 平面上を動く点 P について考える。線分 AP の長さ と 線分 PB の長さ の和の最小値を m としたとき、 $\frac{m}{\sqrt{5}}$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

9 円 $C: x^2 + y^2 = 20$ と円 C の外部に存在する点 $R(8, a)$ (a は負の実数) について考える。点 R を通り円 C に接する直線は 2 つ存在する。この 2 つの直線が円 C と接する点を P 、 Q とする (点 P 、 Q の x 座標をそれぞれ p 、 q とする)。 $\angle PRQ = 60^\circ$ となるとき、 $|a + p + q|$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

10 楕円 $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ と直線 $L: x - 2y + 10 = 0$ について考える。楕円 C 上の点 P から直線 L に下ろした垂線と直線 L の交点を Q とする。線分 PQ の最大値を M 、最小値を m とするとき、 $\frac{M}{m}$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 シ 3 ス 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

11 第 10 項が 29、第 15 項が 19 である等差数列について考える。初項からの和の最大値を M としたとき、 $\frac{M}{72}$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 シ 3 ス 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

12 数列 $\{a_n\}$ は、 $a_1 = 1$ 、 $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 4$ を満たしている。
 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n}$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 シ 3 ス 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

13 $x - 6, x, y$ がこの順で等比数列であり, $x - 9, x, y - x$ がこの順で等差数列であるとする($x > 6, y > 0, x, y$ は実数)。 $\frac{3y}{x}$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

14 1辺の長さが $\sqrt{15}$ である正四面体OABCについて考える。辺OAを1:3に内分する点をM, 辺BCを3:5に内分する点をNとする。

$|\overrightarrow{MN}| = m$ としたとき, $\frac{64m^2}{185}$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

15 $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 2, |\vec{a} - \vec{b}| = 3\sqrt{5}$ であるとする。 $|\vec{a} + t\vec{b}|$ は(t は実数), $t = c$ のとき, 最小値 m をとる。 $\frac{mc}{3}$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

16 $\triangle ABC$ について考える。点 P は、 $6\vec{AP} + 3\vec{BP} + 2\vec{CP} = \vec{0}$ を満たすものとする。 $\triangle ABC$ の面積を S_1 、 $\triangle PBC$ の面積を S_2 としたとき、 $\frac{11S_2}{S_1}$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 チ 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

17 赤い玉が 3 個、白い玉が 6 個入っている袋から、玉を 1 個ずつ取り出すこととする。赤い玉を 3 個取り出したら終了とする。玉を 6 個取り出したときに終了する確率を p とする。 $42p$ の値を求めよ。ただし、取り出した玉は袋にもどさないものとする。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 チ 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

18 $x + y + z = n$ (x, y, z, n は 0 以上の整数) を満たす (x, y, z) の組の数を $f(n)$ で与えることとする。 $f(n) > 185$ となるような最小の n を a とするとき、 $\frac{a}{2}$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 チ 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

- 19 円 $C_1: x^2 + y^2 = a^2$ (a は正の実数) のとき、円 C_1 と x 軸との交点を $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$ とする。円 C_2 は点 A を中心とする円であり、円 C_1 上の点 P (P の y 座標は正の実数とする) で円 C_1 と交わることをとする。線分 AB と円 C_2 の交点を Q としたとき、線分 PQ の長さの最大値を M とする。
 $\frac{3\sqrt{6}M}{2a}$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

- 20 $\lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt{(n+2)(n+3)} - \sqrt{(n-2)(n-3)}\} = a$ とする。
 極限值 a を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

- 21 関数 $f(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - t \cos x)^2 dx$ は、 $t = a$ (a は正の実数) で最小値をとるものとする。 a を超えない最大の整数の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

22 関数 $f(x) = \frac{2ax}{x^2 - ax + 1}$ ($|a| < 2$, a は実数) の最大値が 2 となるとき, a のとる値は, p と q の 2 つ存在する。 $|p - q|$ の値を求めよ。

- (ア) 0 (カ) 1 (サ) 2 (タ) 3 (チ) 4
 (ハ) 5 (マ) 6 (ヤ) 7 (ラ) 8 (ワ) 9

23 3次方程式 $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ (b, c, d は実数) は, すべて異なる 3 つの実数解 α, β, γ ($\alpha < \beta < \gamma$) をもつとする。 $\alpha + \beta + \gamma = 3$, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 9$, $\alpha\beta\gamma = k$ であるとき, k のとりうる値の範囲は, $-p < k < 0$ (p は正の実数) となる。 p の値を求めよ。

- (ア) 0 (カ) 1 (サ) 2 (タ) 3 (チ) 4
 (ハ) 5 (マ) 6 (ヤ) 7 (ラ) 8 (ワ) 9

24 定積分 $\frac{35}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x \, dx$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 チ 4
ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 リ 9

25 関数 $f(x)$ は、等式 $f(x) = 3x^2 \int_{-1}^1 f(t) \, dt + x \int_0^1 \{f'(t)\}^2 \, dt + \int_0^1 f(t) \, dt$ を満たす。 $f(0) - \frac{1}{4}$ の値を求めよ。 $\int_0^1 f(t) \, dt \neq 0$ とする。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 チ 4
ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 リ 9