

# 数 学

<監督者の指示があるまで開いてはいけない>

1. 試験開始後、まず解答用紙に自分の受験番号と氏名を正しく記入しなさい。
2. 試験開始後、速やかに問題冊子に落丁や乱丁がないか確認しなさい。  
落丁や乱丁があった場合は、手を挙げなさい。
3. 解答用紙に印刷されていない問いの番号は各自で記入しなさい。
4. 下書きは問題冊子の余白を利用しなさい。
5. 問題冊子は各科目の試験終了後、持ち帰ってもよい。  
ただし、試験途中では持ち出してはいけない。



1. 次の  にあてはまる適切な数値を解答欄に記入せよ。

(1) A, B の 2 人が次のようなゲームを行う。

赤玉 2 個, 白玉 1 個が入っている袋から玉を 1 個取り出し, 色を調べてからもとに戻す。取り出した玉の色により, 赤玉のときは A が 1 点を得て, 白玉のときは B が 2 点を得る。この試行を繰り返し, 先に 3 点以上得た方を勝ちとしてゲームを終了する。

このとき, B が勝つ確率は  (ア) である。また, ゲームが 3 回目の試行により終了する確率は  (イ) である。

(2) 四面体 ABCD において,  $AB = 3$ ,  $BC = \sqrt{13}$ ,  $CA = 4$ ,  $DA = DB = DC = 3$  とし, 頂点 D から  $\triangle ABC$  に垂線 DH を下ろす。このとき, DH の長さは  (ウ), 四面体 ABCD の体積は  (エ) である。

2.  $a$  を正の実数の定数とし、 $xy$  平面上の 2 曲線

$$C_1 : y = xe^{-x}, \quad C_2 : y = ae^{-x}$$

を考える。このとき、次の問いに答えよ。ただし、 $e$  は自然対数の底である。

- (1) 関数  $y = xe^{-x}$  の増減、極値、グラフの凹凸および変曲点を調べて、そのグラフの概形を  $xy$  平面上に描け ( $xy$  平面は解答用紙にある)。ただし、必要ならば  $\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x} = 0$  を用いてよい。
- (2)  $1 \leq x \leq 2$  の範囲で、 $C_1$ 、 $C_2$  と 2 直線  $x = 1$ 、 $x = 2$  で囲まれた部分の面積  $S(a)$  を  $a$  を用いて表せ。
- (3)  $a$  が  $a > 0$  の範囲を動くとき、 $S(a)$  が最小となる  $a$  の値を求めよ。

**3.**  $n$  を 2 以上の整数の定数とする。  $xy$  平面上に定点  $A(1, 0)$  がある。  $y$  軸上の点  $P$  を通り  $x$  軸に平行な直線上で、  $AP + PQ \leq n$  をみたす点  $Q$  を考える。  $P$  が  $y$  軸上を動くとき、  $Q$  の存在範囲を  $D(n)$  とする。 このとき、 次の問いに答えよ。 問い (1) では  にあてはまる適切な式を解答欄に記入せよ。

(1)  $D(n)$  は不等式  (オ) をみたす点  $(x, y)$  全体である。 また、  $D(2)$  を  $xy$  平面上に図示せよ ( $xy$  平面は解答用紙にある)。

(2)  $xy$  平面上で  $x$  座標と  $y$  座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。  $D(n)$  に含まれる格子点の個数  $S(n)$  を  $n$  を用いて表せ。 また、  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S(n)}{(2n+1)^2}$  の値を求めよ。

4.  $O$  を原点とする  $xyz$  空間に定点  $A(2, 1, 2)$  がある。点  $P$  が条件「2つのベクトル  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OP}$  のなす角は  $\frac{\pi}{3}$  かつ  $|\vec{OA}| = |\vec{OP}|$ 」をみたしながら動くとき、次の問いに答えよ。問い(1)では  にあてはまる適切な座標または数値を解答欄に記入せよ。

(1) 点  $P$  から直線  $OA$  に垂線  $PC$  を下ろすとき、 $P$  の位置によらず点  $C$  の座標は  (カ) である。また、 $C$  を通り、直線  $OA$  に垂直な平面  $\alpha$  上に、2点  $G(0, 0, s)$ ,  $H(1, 2, t)$  があるとき、 $s, t$  の値は  $s =$   (キ),  $t =$   (ク) である。

(2)  $P(x, y, z)$  について、 $y - 2x$  のとり得る値の範囲を求めよ。



