2015年度入学試験問題(前期)

数　　学（問　題）

注　意

1)　数学の問題冊子は4ページあり，問題はⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの4題である。

2)　別に解答用紙1枚があり，**解答はすべてこの解答用紙の指定欄に記入すること。**
指定欄以外への記入はすべて無効である。
計算や下書きは問題用紙の白紙・空白部分を利用して行うこと。

3)　**解答用紙の所定欄に受験番号を記入せよ。氏名を記入してはならない。**
解答用紙の※印の欄には何も記入してはならない。

4)　問題冊子，解答用紙はともに持ち出してはならない。

5)　途中退場または試験終了時には，解答が他の受験生の目に触れないよう，解答用紙の上に問題冊子を重ねて，監督者の許可を得た後に退出すること。

2015年度前期入学試験問題　数学（問題）　訂正

1ページ

問題Ⅰ(6)は解答しなくて良い

I　(1)~(6)の $\boxed{}$ の中に，あてはまる数，角度，整式，不等式，記号，語句などを記入せよ。

(1) 次の式を因数分解せよ。

$x^3+y^3=$ $\boxed{\text{ア}}$，$(2x+y)(x-y)+2xy-x-y=$ $\boxed{\text{イ}}$

(2) $\dfrac{1}{3-\sqrt{5}}$ の整数部分は $x=$ $\boxed{\text{ウ}}$，小数部分は $y=$ $\boxed{\text{エ}}$ であり，$x^2+4xy+16y^2=$ $\boxed{\text{オ}}$ である。

(3) a は1でない正の定数，n は自然数とし $x_{n+1}=(x_n)^a$，$x_1=2$ で定められる数列 $\{x_n\}$ を考える。第 n 項 x_n を n の式で表すと $\boxed{\text{カ}}$ となる。この数列は，a が条件 $\boxed{\text{キ}}$ を満たすとき，任意の n に対して $x_{n+1}<x_n$ を満たし，かつ $\lim_{n\to\infty}(x_1x_2\cdots\cdots x_n)=$ $\boxed{\text{ク}}$ となる。

(4) x，y に関する連立方程式 $4^{x-y}=256$，$\log_2(x+y)=4$ の解は，$x=$ $\boxed{\text{ケ}}$，$y=$ $\boxed{\text{コ}}$ である。

(5) n，k は $1\leqq k\leqq n$ を満たす整数とする。x に関する恒等式 $x^n=a_n(x-1)^n+a_{n-1}(x-1)^{n-1}+\cdots\cdots+a_1(x-1)+1$ が成り立つとき，$a_k=$ $\boxed{\text{サ}}$，$a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n=$ $\boxed{\text{シ}}$ である。

(6) i，n は $1\leqq i\leqq n$ を満たす自然数，k は $-n\leqq k\leqq n$ を満たす整数とし，1個の正常なサイコロを n 回投げる操作を考える。第 i 回目に投げたときに出た目が，3の倍数ならば $X_i=-1$，3の倍数でなければ $X_i=1$ と定め，$X=X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n$ とおく。このとき，X_i の期待値は $\boxed{\text{ス}}$，X の期待値は $\boxed{\text{セ}}$ であり，$X=k$ となる確率は $\boxed{\text{ソ}}$ である。

Ⅱ　$0 < a < 2$ とする。点 O を中心とし，半径が 1 の円周上に 3 点 A，B，C があり

$$a\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{0}$$

を満たしているとする。以下，括弧タ～ツには，a の式を記入すること。

(1)　$\cos\angle\mathrm{AOB} = \boxed{\text{タ}}$，$\cos\angle\mathrm{BOC} = \boxed{\text{チ}}$ である。

(2)　△ABC の面積は $S = \boxed{\text{ツ}}$ である。

(3)　問(2)の S は，$a = \boxed{\text{テ}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{ト}}$ をとる。

Ⅲ　$0 < \theta < \pi$ とする。

(1)　$2 \cdot \cos\theta + 3 \cdot \sin\theta = 1$ を満たすのは，$\cos\theta =$ $\boxed{\quad ナ \quad}$，
$\sin\theta =$ $\boxed{\quad ニ \quad}$ である。

(2)　p，q は $p^2 + q^2 \neq 0$ を満たす実数とする。関係式

$$p \cdot \cos\theta + q \cdot \sin\theta = 1 \cdots ①$$

を満たす解 θ が 2 つ存在するための条件を，p，q を用いて表すと $\boxed{\quad ヌ \quad}$ となる。

以下，括弧ヌの条件が満たされているものとする。

(3)　①の解を θ_1，θ_2 とする。座標平面において，原点 O，点 A$(\cos\theta_1,\ \sin\theta_1)$，及び点 B$(\cos\theta_2,\ \sin\theta_2)$を頂点とする△OAB の面積 S を p，q を用いて表すと $\boxed{\quad ネ \quad}$ となる。そして p，q の値が括弧ヌの条件を満たしながら変化するとき，S が最大値を取るのは，線分 AB の長さが $\boxed{\quad ノ \quad}$ のときである。

Ⅳ　n は自然数とし，$k=1$，2，3，……，n に対して，次の関数を考える。

$$f_k(x)=\sin(kx)-\sqrt{\frac{k}{n}}\cos(kx)$$

(1)　関数 $|f_k(x)|$ の，正で最小の周期は $\boxed{\quad ハ \quad}$ である。ただし，記号 $|a|$ は実数 a の絶対値を表す。

(2)　定積分 $I_k=\displaystyle\int_0^{2\pi}|f_k(x)|\,dx$ の値は $\boxed{\quad ヒ \quad}$ である。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}I_k=$ $\boxed{\quad フ \quad}$ である。