一般入試　数学

Ⅰ　袋の中に 1 から 8 までの数字が書かれたカードが 1 枚ずつ入っている．

この袋から 2 枚のカードを同時に取り出してカードに書かれた数字を確認し，袋に戻すという操作を n 回繰り返す．

(a)　2 枚のカードの数字の和は $\boxed{\text{ア}}$ が最も出やすく，1 回の操作でその和が出る確率は $\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である．また，1 回の操作において，2 枚のカードの数字の 2 乗の差が 5 で割り切れる確率は $\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オカ}}}$ である．

(b)　n 回の操作のうち，2 枚のカードの数字の和が 4 の倍数になる回数が奇数である確率を P_n とすると，$P_1=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$，$P_2=\dfrac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シス}}}$ である．

P_{n+1} と P_n は

$$P_{n+1}=\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}P_n+\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チツ}}}$$

を満たす．また，

$$\lim_{n\to\infty}P_n=\frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$$

である．

Ⅱ　$\boxed{\text{サ}}$ の解答は解答群の中から最も適当なものを１つ選べ．

式 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}=1$ で表される楕円を F とする．

(a)　座標平面上の点 A(１，２)を通る，傾き k の直線は

$$y=k\left(x-\boxed{\text{ア}}\right)+\boxed{\text{イ}}$$

と表せる．この直線が楕円 F に接するとき，接線の傾き k に対し，次式が成り立つ．

$$k^2+\boxed{\text{ウ}}\,k-\boxed{\text{エ}}=0$$

点 A から楕円 F に引いた２つの接線のなす角は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\pi$ である．

これらの接線と楕円 F の接点を B，C とし，∠BAC の二等分線の傾きを $\tan\alpha$ とすると，$\tan 2\alpha=\boxed{\text{キク}}$ が成り立つ．

(b)　楕円 F の外部にある点 P から F に引いた２つの接線の接点を Q，R とする．∠QPR の二等分線の傾きが１であるとき，点 P は

$$\boxed{\text{ケ}}\,x^2+y^{\boxed{\text{コ}}}=1$$

で表される $\boxed{\text{サ}}$ 上にある．

$\boxed{\text{サ}}$ の解答群

①　直　線　　②　円　周　　③　楕　円　　④　双曲線　　⑤　放物線

Ⅲ $\boxed{\text{ア}}$ の解答は解答群の中から該当する番号をすべて選び，$\boxed{\text{イ}}$ の解答は解答群の中から最も適当なものを１つ選べ．

a は $0 < a < 6$ を満たす定数，x は正の実数とする．２つの関数

$$f(x) = 2^{-2x}, \qquad g(x) = \log_4\left(\frac{1}{a-x}\right) - \log_4(x - 2a + 6)$$

について以下の問いに答えよ．

(a) 曲線 $y = f(x)$ 上の任意の点は，$y = \log_2 x$ のグラフを $\boxed{\text{ア}}$ し，さらに $\boxed{\text{イ}}$ して得られるグラフ上にある．

(b) $0 < a < 6$ の範囲で a が変化するとき，$y = f(g(x))$ のグラフが通過しうる領域を D とする．x を固定して a を変化させたときの y の取りうる値を考えると，D は x 軸，y 軸，および曲線 $y = \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}x^2 - \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}x + \dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ で囲まれた領域であることがわかる．この領域 D の面積は $\boxed{\text{ケ}}$ である．

(c) $y = g(x)$ のグラフと $y = \log_{\frac{1}{4}}\left(\dfrac{5-x}{2}\right)$ のグラフが，共有点を２個持つような定数 a の範囲は

$\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} < a < \dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ または $\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}} < a < \boxed{\text{セ}}$ である．

$\boxed{\text{ア}}$ の解答群

① x 軸に関して対称移動した後，直線 $y = x$ に関して対称移動

② y 軸に関して対称移動した後，直線 $y = x$ に関して対称移動

③ 原点に関して対称移動した後，直線 $y = x$ に関して対称移動

④ 直線 $y = x$ に関して対称移動した後，x 軸に関して対称移動

⑤ 直線 $y = x$ に関して対称移動した後，y 軸に関して対称移動

⑥ 直線 $y = x$ に関して対称移動した後，原点に関して対称移動

$\boxed{\text{イ}}$ の解答群

① x 軸方向に $+2$ だけ平行移動

② x 軸方向に -2 だけ平行移動

③ x 軸方向に２倍拡大

④ x 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ 倍に縮小

⑤ y 軸方向に $+2$ だけ平行移動

⑥ y 軸方向に -2 だけ平行移動

⑦ y 軸方向に２倍拡大

⑧ y 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ 倍に縮小

Ⅳ $\boxed{\text{ツ}}$ の解答は解答群の中から最も適当なものを１つ選べ.

(a) 次式左辺の積分に対し，定数 A, B, C を用いて

$$\int_0^x e^{-3t}\sin 4t\,dt = e^{-3x}(A\sin 4x + B\cos 4x) + C$$

なる関数形を仮定する．この式の両辺を x で微分すると，A, B は

$$A = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}},\quad B = \frac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キク}}}$$

と求まる．また，$x = 0$ とすると，$C = \dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}$ を得る．

したがって

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x e^{-3t}\sin 4t\,dt = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{スセ}}}$$

が成り立つ．

(b) 自然数 n に対し，$I_n = \int_{\frac{n-1}{4}\pi}^{\frac{n}{4}\pi} e^{-3t}|\sin 4t|\,dt$ とおく．I_n は等比数列であり，その公比は e^{α} と表される．ただし $\alpha = \dfrac{\boxed{\text{ソタ}}}{\boxed{\text{チ}}}\pi$ である．

この数列から作られる無限級数の和は，設問(a)で求めた定数 C を用いて

$$\sum_{n=1}^{\infty} I_n = C \times \boxed{\text{ツ}}$$

と表せる．

$\boxed{\text{ツ}}$ の解答群

① $(1+e^{\alpha})$　② $(1-e^{\alpha})$　③ $(e^{\alpha}-1)$　④ $\dfrac{1}{1+e^{\alpha}}$

⑤ $\dfrac{1}{1-e^{\alpha}}$　⑥ $\dfrac{1}{e^{\alpha}-1}$　⑦ $\dfrac{1-e^{\alpha}}{1+e^{\alpha}}$　⑧ $\dfrac{e^{\alpha}-1}{1+e^{\alpha}}$

⑨ $\dfrac{1+e^{\alpha}}{1-e^{\alpha}}$　⓪ $\dfrac{1+e^{\alpha}}{e^{\alpha}-1}$