

平成 27 年度医学科入学試験問題

数 学

〔注意事項〕

- 1 監督者の指示があるまで、この冊子を開いてはいけない。
- 2 解答用紙に受験番号と氏名を必ず記入すること。
- 3 この問題冊子の本文は、4 ページからなっている。落丁、乱丁及び印刷不鮮明な箇所等があれば、手をあげて監督者に知らせなさい。
- 4 この問題冊子の計算用紙と余白は、適宜下書きに使用してもよい。
- 5 解答は、すべて別紙「解答用紙」の指定された場所に記入すること。
- 6 この問題冊子は持ち帰ること。

1 n を 1 以上の整数とし

$$f_n(x) = \frac{1}{(2-x)^n} + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2+x)^n} \quad (|x| < 2)$$

とおく。これについて

$$I_1 = \int_0^1 f_1(x) dx$$

$$I_n = \int_0^1 (1-x)^{n-1} f_n(x) dx \quad (n \geq 2)$$

とおく。

- (1) $f_n(x)$ の導関数 $f'_n(x)$ を $f_{n+1}(x)$ を用いて表せ。
- (2) n が奇数のとき $I_n = \frac{1}{2^{n-1}n} + I_{n+1}$, n が偶数のとき $I_n = I_{n+1}$ であることを証明せよ。
- (3) $0 \leq I_n \leq \frac{2}{n}$ であることを証明せよ。
- (4) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^{k-1}(2k-1)} = \log 3$ であることを証明せよ。

2 円錐 C は母線の長さが 1 で、側面を扇形に展開したときの展開図の中心角が θ ($0 < \theta < 2\pi$) であるとする。円錐 C の底面の半径を R とし、円錐 C に内接する球 B の半径を r とする。球 B と円錐 C の側面とで囲まれた部分を A とする。

- (1) R と r を θ を用いて表せ。
- (2) A の体積を V とするとき、 V を R を用いて表せ。
- (3) C の側面のうち A に含まれる部分の面積を S とする。 $0 < \theta < 2\pi$ のとき、 $\frac{V}{S}$ を最大にする θ の値を求めよ。

3 関数

$$g(x) = -\frac{1}{2} \left| |\log|x| + 1| + \log|x| - 1 \right| \quad (x \neq 0)$$

に対して、 $f(x) = e^{g(x)}$ ($x \neq 0$) とし、 $f(0) = \frac{1}{e}$ とおく。ここで e は自然対数の底である。

(1) 関数 $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ。

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $A(a, f(a))$ を固定する。 x 軸上に 2 点 B, C をとり、 $y \leq f(x)$ の表す領域に含まれる三角形 ABC を考える。このような三角形のうち最大の面積をもつ三角形の面積を $S(a)$ とおく。

(2) $S(0)$ を求めよ。

(3) $S(a) \leq S(0)$ であることを証明せよ。

4 1 から 10 までの番号が書かれたカードが 1 枚ずつ全部で 10 枚ある。この中から無作為に 1 枚選び、立方体 ABCD-EFGH の頂点 A にそのカードを割り当てる。次に残りの 9 枚から無作為に 1 枚選び、頂点 B にそのカードを割り当てる。以下同様にして、C から H までの頂点にカードを割り当て、立方体の 8 個の頂点に 8 枚の異なるカードを割り当てる。

- (1) 立方体の 8 個の頂点に割り当てたカードの番号の和が偶数になる確率を求めよ。
- (2) 立方体の面のうちで、面の 4 頂点に割り当てたカードの番号の和が偶数になるものの個数を数える。その個数がちょうど 3 になる確率を求めよ。
- (3) 立方体のすべての面において、面の 4 頂点に割り当てたカードの番号の和が偶数になる確率を求めよ。
- (4) 立方体のすべての面において、面の 4 頂点に割り当てたカードの番号の和が奇数になる確率を求めよ。