

平成 27 年度

[数 学]

問 題 用 紙

試験時間	90分
問題用紙	1～6頁

注 意 事 項

1. 指示があるまで問題用紙は開かないこと。
2. 問題用紙および解答用紙に落丁、乱丁、印刷の不鮮明な箇所があったら、手を挙げて監督者に知らせること。
3. 解答が終わっても、または試験を放棄する場合でも、試験終了までは退場できない。
4. 机上には、受験票と筆記用具および時計（計時機能のみ）以外は置かないこと。
5. 筆記用具は鉛筆、シャープペンシル、消しゴムのみとする。
(コンパス、定規等は使用できない。)
6. 止むを得ず下敷を使用する場合は、監督者の許可を得ること。
7. 問題用紙および解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。
8. 解答はすべて解答用紙の所定の解答欄に記入すること。欄外には何も書かないこと。
9. この問題用紙の余白は草稿等に自由に用いてよい。
10. 耳栓の使用はできない。
11. 携帯電話等の電源は必ず切り、鞆の中にしまうこと。
12. 質問、用便、中途退室など用件のある場合は、無言のまま手を挙げて監督者の指示に従うこと。
13. 受験中不正行為があった場合は、試験の一切を無効とし、試験終了時間まで別室で待機を命じる。
14. 退室時は、試験問題および解答用紙を裏返しにすること。
15. 試験終了後、問題用紙は持ち帰ること。

受験番号		氏 名	
------	--	-----	--

[I] 次の各問いの答えのみを解答用紙に記せ。

問1 正三角形 ABC の頂点上を点 P が次の規則 ①, ② にしたがって移動する：

- ① 時刻 0 に P は A にいる。
② 1 秒ごとに, P は確率 $\frac{1}{4}$ で今いる頂点にとどまり, 等確率で今いる頂点以外の他の 2 頂点のどちらかに移動する。

n 秒後に P が A にいる確率を p_n とし, $p = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ とするとき, 以下の各問いに答えよ。

- (1) p_n を用いて p_{n+1} を表せ。
- (2) p_n を n の式で表せ。
- (3) p の値を求めよ。
- (4) 不等式 $|p_n - p| < 5^{-20}$ を満たす最小の n の値を求めよ。ただし必要ならば, $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ であることは用いてよい。

問2 O を原点とする座標平面において, 点 (x, y) が 3 つの不等式

$$y \geq \frac{1}{2}x - 1, \quad y \geq 2x - 7, \quad y \leq -x^2 + 8x - 12$$

を満たしているとき, 以下の各問いに答えよ。

- (1) $\frac{y+1}{(x+1)^2}$ の最大値, 最小値と, それらを与える点 (x, y) をそれぞれ求めよ。
- (2) $\frac{y+1}{(x+1)^2} + \frac{(x+1)^2}{y+1}$ の最大値, 最小値を求めよ。

[II] 次の極限值を求めよ。

問 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n + \frac{1}{2}} + \frac{1}{n + \frac{2}{2}} + \frac{1}{n + \frac{3}{2}} + \cdots + \frac{1}{2n} \right)$$

問 2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n + \frac{1}{2}} + \frac{1}{n + \frac{3}{2}} + \frac{1}{n + \frac{5}{2}} + \cdots + \frac{2}{6n - 1} \right)$$

問 3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left\{ \left(1 + \sin \frac{n\pi}{2n} \right)^{\sin \frac{n\pi}{n}} \left(1 + \sin \frac{(n+1)\pi}{2n} \right)^{\sin \frac{(n+1)\pi}{n}} \left(1 + \sin \frac{(n+2)\pi}{2n} \right)^{\sin \frac{(n+2)\pi}{n}} \cdots \right. \right. \\ \left. \left. \cdots \left(1 + \sin \pi \right)^{\sin 2\pi} \right\}^{\frac{1}{n}} \right)$$

[III] 放物線 $y = x^2 - nx$ と直線 $y = mx$ とで囲まれる部分を D_n とする。ただし n, m は

$$n > 1, \quad m > 0, \quad n > m, \quad n > \frac{1}{m}$$

を満たす実数の定数とする。

問1 D_n を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積 V_n の値を, n, m を用いて表せ。

問2 D_n を直線 $y = mx$ のまわりに回転してできる回転体の体積 W_n の値を, n, m を用いて表せ。

問3 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V_n}{W_n}$ の値を, m を用いて表せ。